wqm.: ausführlichere Version der Formelsammlung und Tabellen

1 WQMD.mth: Definitionen für WQM?.mth; Formelsammlung

zu laden als utility
(vereinfachte) Formeln für
Betrag(Wahrscheinlichkeit Schritt links) = Betrag(Wahrscheinlichkeit Schritt rechts)

1.1 *Q0 = Wahrscheinlichkeiten ohne Rausfluß*

(horizontal incl. beider Seiten unvereinbar, Summe = 1)

$$Q0P(n, k, p) := (1 - p)^{(n - k)/2} \cdot p^{(n + k)/2} \cdot COMB\left(n, \frac{n + k}{2}\right)$$

fuer n>=0 gilt

$$Q0P(n, k, p) = \frac{(1 - p)^{(n - k)/2} \cdot p^{(n + k)/2} \cdot n!}{\left(\frac{n - k}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n + k}{2}\right)!}$$

Q0 nun mit integrierter Plire=0.5, damit viele Ausdrücke kürzer:
Q0(n, k) := Q0P(n, k, 0.5)

1.2 *Q0Z=zentrale Wahrscheinlichkeiten ohne Rausfluß*

Q0Z(n) := Q0(n, 0)

1.3 *Q1=Ersatzfunktion für Rausflußdreieck;*

$$Q1(n, k) := Q0(n, k) \cdot \left(- \frac{k}{n}\right)$$

Q1 entspricht einer Überlagerung zweier Q0 Dreiecke entgegengesetzten
Vorzeichens startend in Zeile 1 in k=±1, jeweils gewichtet mit ±1/2
Addition der beiden läuft auf Ableitung nach k hinaus
obige Formel ergibt sich dann aus der Ableitungsformel
Q0(n, k + 2) − Q0(n, k) = 2·Q1(n + 1, k + 1)

1.4 *-Q2Z = zentrale Rausflußwahrscheinlichkeit (vertikal nach oben,*

und horizontal beidseits unvereinbar); summe ergibt mit bisheriger
Vertikalzeile incl. und LATERALEN Horizontalzeilen beidseits: 1

2:Q2Z = 2. hor. Abl. von Q0 in k=0

$$Q2Z(n) := \frac{Q1(n - 1, 1) - Q1(n - 1, -1)}{2}$$

für n>=0 gilt:

$$Q2Z(n) = - \frac{n!}{(n - 1) \cdot 2^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!^2}$$

$$Q2Z(n) = - \frac{Q0Z(n)}{n - 1} \cdot\text{=Po=}- Q0\ (n - 1, 1)\ /\ (n - 1)$$

1.5 *nun Q0-Dreieck mit Pli=-Pre; Q0M=Q0-minus-plus: P nach li=neg*

def unbenutzt: Q0MP (n, k, pr) := Q0P (n, k, pr) (−1)^((k + n) / 2)
nun wie üblich Spezialfall pre=0.5:

$$Q0M(n, k) := Q0(n, k) \cdot (-1)^{(k + n)/2}$$

Q0M horizontal antisymmetrisch für n ungerade (Fermionen)
Q0M horizontal symmetrisch für n gerade (Bosonen)

1.6 nun Rausfluß Q0M := Q1M dto:

$$Q1M(n, k) := Q0(n, k)\cdot(-1)^{(k + n)/2}\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)$$

ende

Im folg. entsprechen die Hauptkapitelnummern denjenigen der wqpm-Dateien

1.7 WQM1.mth: Zusammenstellung analytischer Betrachtungen, Grenzwerte:
folg. def anst. wqmd.mth hier ausreichend:

$$Q0P(n, k, p) := (1 - p)^{(n - k)/2}\cdot p^{(n + k)/2}\cdot COMB\left(n, \frac{n + k}{2}\right)$$

Q0 nun mit integrierter Plire=0.5, damit viele Ausdrücke kürzer:
$Q0(n, k) := Q0P(n, k, 0.5)$
$Q0Z(n) := Q0(n, 0)$

$$Q1(n, k) := Q0(n, k)\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)$$

$$Q2Z(n) := \frac{Q1(n - 1, 1) - Q1(n - 1, -1)}{2}$$

$$Q0M(n, k) := Q0(n, k)\cdot(-1)^{(k + n)/2}$$

1.8 taylorentwicklung von 1/√(1-x^2) = Σ Q0(2n,0)

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q0Z(2\cdot n)\cdot x^{2\cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} Q0P\left(2\cdot n, 0, \frac{1 + \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)$$

taylorentwicklung von √(1-x^2) = 1+Σ Q2Z(2n+2,0)

$$\sqrt{(1 - x^2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q2Z(2\cdot n)\cdot x^{2\cdot n}$$

taylor bei alternierendem Vorzeichen:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q0M(2\cdot n, 0)\cdot x^{2\cdot n}$$

Potential im Gravitationsfeld <-> Summe der Q0P(2n,2n,x) im Rand:
Taylorentwicklung von 1 / (1 - x^2) = Σ Q0P (2n, 2n, x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6...
Pli und Pre für x=v/c<>1: aus 4 p (1 - p) = x^2 folgt p = (1 ± √(1 - x^2)) / 2
falls Plire = ((1 ± √(1 - x^2)) / 2), ergibt sich Taylorreihe einschl. x:

$$Q0P\left(n, 0, \frac{1 + \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right) = \left[\left[0, 1, 2, \frac{x^2}{2}, 4, \frac{3\cdot x^4}{8}, 6, \frac{5\cdot x^6}{16}\right]\right]$$

nun dieses Plire einsetzen in Wurzel, Vorzeichen willkürlich nach einfachsten Ergebnis:

$p = \frac{1 + \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\cdot$daraus folgt im einfachsten Fall:x = 2 √(p (1 - p)); dies eingesetzt in Wurzel:

$$\sqrt{(1 - (2\cdot\sqrt{(p\cdot(1 - p))})^2)} = |2\cdot p - 1|$$

------------------ REM: p*(1-p) = 1/4-(p-1/2)^2

folg. ist bemerkenswert: Wir setzen zunächst p:=0.5+k/(2n), denn:
k/n=-1 <=> p=0, k/n=0 <=> p=0.5, k/n=1 <=> p=1
so folgt |k/n| = |2p-1| = √(1-x^2); (rechte Seite mit oben: √(1 - (2 √(p (1 - p)))^2) = |2 p - 1|
also |k/n| = √(1-x^2) = |2 p - 1| = |pre - pli|
(bzw. (k/n)^2 + x^2 = 1 , analog cos^2+sin^2 = (E0/E)^2 + (pc/E)^2 = 1

oder für die Q0: $|n/k| = 1/\sqrt{(1-x^2)}$)
der ruhende Beobachter nimmt also nur k Zeitimpulse von n des Bewegten
wahr; rem: k/n = (steps horizontal)/(steps vertikal)
mögliche Ansatzpunkte für weitere Überlegungen: z.B. für Ableitung d/dk
---
aufgrund Obigem wäre der Ersatz von p durch $y:=2p-1=k/n$ naheliegend
y würde dann anstelle von 0..1 von -1..1 gehen, wäre also schön symmetrisch;
desweiteren würde gelten $x^2=1-y^2$ bzw. $x^2+y^2=1$ bzw. $y=\pm\sqrt{(1-x^2)}$
das negative y würde Ereignisse charakterisieren, die bei Gleichzeitigkeit
solche mit positivem y neutralisieren
y als Wahrscheinlichkeitsamplitude, $y^2=1-x^1$ als Wahrscheinlichkeit?

Relation kinetische Rotverschiebung zu Rotverschiebung infolge Gravitation:
Sei U der Potentialunterschied in einem Graviationsfeld, der eine Rotverschiebung verursacht
(z.B. gem S. 10 in Sexl 'weiße Zwerge, sw Löcher')
dann beträgt des Verhältnis der Photonenenergien vor und nach Durchquerung des Potentialunterschiedes $1-U^2/c^2$
wenn wir $1 - U/c^2 = \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ setzen, so folgt $U/c^2 = 1-\sqrt{(1 - v^2/c^2)} = 2p$
also U/c^2 = delta_freq/freq = 2p = Summe aller Abflusswahrsch.
gemäß ob. Rechnung, d.h. die aus p resultierende kinetische Energiedifferenz bewirkt
dieselbe Rotverschiebung wie ein GravitationsPotential U mit $U = 2p\, c^2$
sei $R0=2GM/c^2$ der Schwarzschildradius, dann ist $R0/(2r)=U/c^2$, also $p=R0/(4r)$
oder $p = GM/(2r\, c^2)$ bzw. $pr = GM/(2\, c^2)$
bei kosmol. Rotversch. in gleichm. Dichte ist p proportional r bzw p/r=const.

1.9 wir können auch setzen: p := SIN (w)^2

wegen $\cos^2(w)=1-\sin^2(w)$ und $\sin(2w) = 2 \sin(w) \cos(w)$ folgt

$$x^2 = 4\cdot p\cdot(1 - p) = 4\cdot \mathrm{SIN}(w)^2\cdot \mathrm{COS}(w)^2 = \mathrm{SIN}(2\cdot w)^2 = (1 + \mathrm{COS}(2\cdot w))\cdot(1 - \mathrm{COS}(2\cdot w)) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \mathrm{COS}(4\cdot w))$$

also ist $|x|=\sin(2w)$ und $\sqrt{(1-x^2)}=\cos(2w)$ und $p= (1+\mathrm{COS}\ (2\, w))/2$

Einschub:
setzen wir $x=\sin(v)$, so folgt zB. $p=(1-\cos(v))/2=\sin^2(v/2)$, also wegen

$$v = \mathrm{ASIN}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx$$

$$p = \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}(x)}{2}\right)^2 = \mathrm{SIN}\left(\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}$$

aus $\sqrt{p}$ = SIN (1/2 INT (1 / $\sqrt{(1 - x^2)}$, x)) folgt somit

$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx = \mathrm{ASIN}(\sqrt{p}) = \int \frac{1}{2\cdot\sqrt{p}\cdot\sqrt{(1 - p)}}\, dp$$

$$\mathrm{ASIN}(x) = 2\cdot \mathrm{ASIN}(\sqrt{p})$$
----
d/dp(Q0P) / Q0P ist proprotional k und n,
geht gegen ∞ für p->0, oder p->1
geht gegen 0 für p-> 0.5 + k/(2*n)

$$\frac{\frac{d}{dp} Q0P(n, k, p)}{Q0P(n, k, p)} = \frac{k + n\cdot(1 - 2\cdot p)}{2\cdot p\cdot(1 - p)} = \frac{k}{2\cdot(1 - p)} + \frac{k}{2\cdot p} + \frac{n}{2\cdot(p - 1)} + \frac{n}{2\cdot p}$$

dto Übersichtlich für kr=(k+n)/2 vom Rand aus (d.h. k=2kr-n):

$$\frac{\frac{d}{dp}\left(p^{kr}\cdot(1 - p)^{n - kr}\right)}{p^{kr}\cdot(1 - p)^{n - kr}} = \frac{kr - n\cdot p}{p\cdot(1 - p)} = \frac{2\cdot kr - n + n\cdot(1 - 2\cdot p)}{2\cdot p\cdot(1 - p)}$$

1.9.1

Zusammenfassend Ableitungen nach dp bzw. dx:

$$\frac{d}{dp} Q0P(n,k,p) = \frac{k + n\cdot(1-2\cdot p)}{2\cdot p\cdot(1-p)}\cdot Q0P(n,k,p)$$

$$\frac{d}{dx} Q0P\left(n,k,\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right) = \left(\frac{n}{x} - \frac{k}{x\cdot\sqrt{(1-x^2)}}\right)\cdot Q0P\left(n,k,\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx} Q0P\left(n,k,\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right) = \frac{n\cdot\sqrt{(1-x^2)} - k}{x\cdot\sqrt{(1-x^2)}}\cdot Q0P\left(n,k,\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx} Q0P\left(n,k,\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right) = \frac{n\cdot\sqrt{(1-x^2)} + k}{x\cdot\sqrt{(1-x^2)}}\cdot Q0P\left(n,k,\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{2}\right)$$

Sonderrolle der Summe der –Q2Z ab n=2:

setzen wir $\cdot s2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} - Q2Z(2\cdot n)\cdot x^{2\cdot n}\right)\cdot$ so gilt $\cdot\sqrt{(1-x^2)} = 1 - s2$

und wegen $\sqrt{(1-x^2)} = |1-2p|$ folgt für dasjenige p mit p<0.5 :

$$p = \frac{s2}{2}\cdot \text{ und } \cdot p\_hin\_her = p\cdot(1-p) = \frac{s2}{2}\cdot\left(1-\frac{s2}{2}\right) = \frac{x^2}{4}$$

Bezug von x=v/c zu Massenverhältnis Photon/Ruhemasse:
bei Absorption eines Photons der Masse mp an Ruhemasse m0
erfolgt Impulsabgabe mp*c, d.h. Ruhemasse beschleunigt zB von 0 auf v mit

$$mp\cdot c = \frac{m0\cdot v}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}\cdot \text{also}\cdot\left(\frac{mp}{m0} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right)\cdot \text{also}$$

$$\frac{mp}{m0} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{(1-x^2)}\right)$$

daraus folgt für 0<x<<1 : x -> mp/m0 oder mp->m0*x
und für x=1–a, wobei a->0+0 :
mp/m0 -> 1/√(1 – (1 – a)^2) = 1/√(2·a – a^2) -> 1/√(2·a)
also für x->1–1: mp->m0 / √(2a) = m0 / √(2–2x)
aber für x->0+0 (wie erwähnt): mp -> m0 * x

1.10 nun Q0 analytische Darstellung (für n->inf mit k^3/n^2->0 (Krengel S.80))

$$Q0E(n,k) := \frac{\sqrt{2}\cdot \hat{e}^{-k^2/(2\cdot n)}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}$$

Q0E mit variablem p (Krengel S.80): Faktor 8 statt 2 im ê^Nenner wegen k ganzzahlig

$$Q0EP(n,k,p) := \frac{\hat{e}^{-(k+n\cdot(0.5-p))^2/(8\cdot n\cdot p\cdot(1-p))}}{\sqrt{(2\cdot\pi\cdot n\cdot p\cdot(1-p))}}$$

$$Q0EP(n,k,0.5) - Q0E(n,k) = 0$$

----

nun Q1 analytische Darstellung (für n->inf mit k^3/n^2->0 (Krengel S.80))

$$Q1E(n, k) := -\frac{k \cdot Q0E(n, k)}{n}$$

$$Q1EP(n, k, p) := -\frac{k \cdot Q0EP(n, k, p)}{n}$$

$$Q1EP(n, k, 0.5) - Q1E(n, k) = 0$$

$$Q1E(n, k) = -\frac{\sqrt{2} \cdot k \cdot \hat{e}^{-k^2/(2 \cdot n)}}{\sqrt{\pi} \cdot n^{3/2}}$$

----

folgendes Integral approximiert wegen Q0E (n, 1) = -n Q1E (n, 1)

betragsmsaessig die vertikale Abweichung der Q1E:

$$\int Q0E(n, 0)\, dn = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

geht also im Fall p= 0.5 gegen unendlich für n gegen unendlich:

analog bei folg. Q0EP (n, 1, p) = -n Q1EP (n, 1, p) zu bedenken:

$$\int Q0EP(n, 0, p)\, dn = \frac{4 \cdot \mathrm{ERF}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot (2 \cdot p - 1) \cdot \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))}}{8 \cdot p \cdot (p - 1)}\right)}{1 - 2 \cdot p}$$

geht fuer 0<p<0.5 gegen 4 / (1 - 2 p) fuer n gegen unendlich

wegen |1-2p|=√(1-x^2) also gegen 4/√(1-x^2)

zum Faktor 4 gegenüber der diskreten Summe trägt u.a. bei,

dass bei der diskreten Summe nur über jede Doppelzeile addiert wird

----

Abw Q0e:

$$\int n \cdot Q0E(n, 0)\, dn = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot n^{3/2}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Abw. Q0EP

$$\int n \cdot Q0EP(n, 0, p)\, dn = \frac{64 \cdot p \cdot (p - 1) \cdot \mathrm{ERF}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot (2 \cdot p - 1) \cdot \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))}}{8 \cdot p \cdot (p - 1)}\right)}{(2 \cdot p - 1)^3} - \frac{16 \cdot \sqrt{2} \cdot \hat{e}^{n \cdot (2 \cdot p - 1)^2/(32 \cdot p \cdot (p - 1))} \cdot \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))}}{\sqrt{\pi} \cdot (2 \cdot p - 1)^2}$$

wegen p-1<0 geht der zweite Bruch gegen 0 für n gegen Unendlich
und der erste wird betragsmaessig zu 64 p (p - 1) / (2 p - 1)^3

1.11 Maximum der Q1 und Q1E seitlich bei k = ±√n :

$$\frac{d}{dk} Q1E(n, k) = -\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{e}^{-k^2/(2 \cdot n)} \cdot (n - k^2)}{\sqrt{\pi} \cdot n^{5/2}} \cdot =0 \text{ für } k = \pm\sqrt{n}$$

$\sqrt{2}$ 0.48394144903

$$Q1E(n, -\sqrt{n}) = \frac{}{\sqrt{ê}\cdot\sqrt{\pi}\cdot n} = \frac{}{n}\cdot$$ =wert in Maximum der Po

also ΣQ1Max vert <= ln(n) * √[2/(πé)] bzw (falls to:=ΣQ1Max): n>= é^(to*√(πé/2))
ΣQ1 vom Rand bis Max = Q0E (n, 0) / √ê = Q0E (n, 0) / 1.6487212707

$$Q0E(n, \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ê}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}\cdot$$ =Q1Max *√n =ΣPo vom Rand einseitig = Q0E(n,0)/√ê

nun ΣPo von Mitte zu PoMax = Q0E (n, 0) * (1 - 1 / (√ê))=Q0E (n, 0)/2.5414940825=1/3.1853√n:

$$Q0E(n, 0) - Q0E(n, \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{ê}}\right) = \frac{1}{3.1852904635\cdot\sqrt{n}}$$

1.12 Integrale und Ableitungen

Verhalten für n->inf; Diracsche Deltafunktion
zunächst gilt (für alle n>0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q0E(n, k)}{2}\, dk = 1$$

Das Verhalten für n->inf lässt sich durch eine n-proportionale Maßstabsanpassung veranschaulichen, d.h. durch eine horizontale Stauchung und dafür vertikale Streckung um jeweils den Faktor n; der Wert des Integrals bleibt davon unberührt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\cdot Q0E(n, n\cdot k)}{2}\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{n}{2\cdot\pi}\right)}\cdot ê^{-k^2\cdot n/2}\, dk = 1$$

die Funktion f(x):=n·Q0E(n, n·x)/2 geht für n->inf also
gegen die Diracsche Deltafunktion

1.12.1 Grenzwert der Vorfaktoren der Ableitungen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^{o} (n\cdot Q0E(n, n\cdot k))}{(-n\cdot k)^{o}\cdot n\cdot Q0E(n, n\cdot k)} = 1$$

1.12.2 ---- Ableitungen nach k fuer variable p:

$$\frac{\frac{d}{dk} Q0EP(n, k, p)}{Q0EP(n, k, p)} = \frac{k + n\cdot(1 - 2\cdot p)}{4\cdot n\cdot p\cdot(p - 1)}$$

$$\frac{\frac{d}{dk} Q0EP\left(n, k, \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)}{Q0EP\left(n, k, \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)} = \frac{k}{(k + n)\cdot(n - k)} = \frac{k}{n^2 - k^2}$$

setzt man k = n·√(1 - x^2), so gilt k/(n^2 - k^2) = √(1 - x^2)/(n·x^2)
----- nun (zwecks Vollstaendigkeit) Allgemeinfall der Abl. d/dn und d/dk^2

$$\frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0EP(n, k, p)}{Q0EP(n, k, p)} = \frac{k^2 + 2\cdot k\cdot n\cdot(1 - 2\cdot p) + n\cdot(n\cdot(2\cdot p - 1)^2 + 4\cdot p\cdot(p - 1))}{16\cdot n^2\cdot p^2\cdot(p - 1)}$$

$$\frac{\frac{d}{dn}Q0EP(n,k,p)}{Q0EP(n,k,p)} = \frac{k^2 - n\cdot(n\cdot(4\cdot p^2 - 4\cdot p + 1) - 4\cdot p\cdot(p-1))}{8\cdot n^2\cdot p\cdot(1-p)}$$

$$\frac{\frac{d}{dn}Q0EP(n,k,p)}{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0EP(n,k,p)} = \frac{2\cdot p\cdot(1-p)\cdot(k^2 - n\cdot(n\cdot(4\cdot p^2 - 4\cdot p + 1) - 4\cdot p\cdot(p-1)))}{k^2 + 2\cdot k\cdot n\cdot(1-2\cdot p) + n\cdot(n\cdot(2\cdot p - 1)^2 + 4\cdot p\cdot(p-1))}$$

---- bissel unuebersichtlich, daher Vereinfachungen fuer p=1/2 und k=n(2p-1):

$$2\cdot\frac{d}{dn}Q0EP\left(n,k,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0EP\left(n,k,\frac{1}{2}\right)$$

$$f1(n,k,p) := \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0EP(n,k,p)}{Q0EP(n,k,p)}$$

$$f1(n,n\cdot(2\cdot p-1),p) = \frac{1}{4\cdot n\cdot p\cdot(p-1)}$$

$$f2(n,k,p) := \frac{\frac{d}{dn}Q0EP(n,k,p)}{Q0EP(n,k,p)}$$

$$f2(n,n\cdot(2\cdot p-1),p) = -\frac{1}{2\cdot n}$$

$$\frac{f1(n,n\cdot(2\cdot p-1),p)}{f2(n,n\cdot(2\cdot p-1),p)} = \frac{1}{2\cdot p\cdot(1-p)}$$

1.12.3 Ableitungen fuer p=1/2:

$$\frac{d}{dk}Q0EP\left(n,k,\frac{1}{2}\right) = \frac{d}{dk}Q0E(n,k) = Q1E(n,k) = Q1EP\left(n,k,\frac{1}{2}\right)$$

einfache Ableitung nach dk entspricht Multiplikation mit -k/n;
bei zweifacher Ableitung resultiert nicht der Vorfaktor k^2/n^2,
sondern k^2/n^2 - 1/n; 1/n als Unschärfe? - Vertauschungsrelation -
mehrfache Ableitung jedenfalls nicht durch
mehrfache Multiplikation mit k/n imitierbar, denn die
Reihenfolge Multiplikation mit k/n und Abl. d/dk nicht vertauschbar, denn der Unterschied
des aus beiden Operationen resultierenden Faktors (Eigenwertes) ist nicht 0, sondern
beträgt 1/n = (k^2-n)/n^2 - k^2/n^2; vgl Heisenberg Vertauschungsrelation 144 Wolf 1 (***)
1/n analog h/î? 1/n=1/Varianz=1/(Abw^2 der Q0) oder 1/(Abw der Q0 vom Rand)

$$\frac{d}{dk}\frac{d}{dk}Q0E(n,k) = 2\cdot\frac{d}{dn}Q0E(n,k) = \frac{k^2-n}{n^2}\cdot Q0E(n,k) = \frac{n-k^2}{k\cdot n}\cdot Q1E(n,k)$$

$$\frac{d}{dk}\frac{d}{dk}Q1E(n,k) = 2\cdot\frac{d}{dn}Q1E(n,k) = -\frac{k\cdot(k^2-3\cdot n)}{n^3}\cdot Q0E(n,k) = \frac{k^2-3\cdot n}{n^2}\cdot Q1E(n,k)$$

1.13 ***nun die Vorfaktoren für Ableitungen d/dk höheren Grades:***

$$f(o) := \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(n,\ k)}{\mathrm{Q0E}(n,\ k)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dfrac{k^2 - n}{n^2} & 4 & \dfrac{k^4 - 6 \cdot k^2 \cdot n + 3 \cdot n^2}{n^4} & 6 & \dfrac{k^6 - 15 \cdot k^4 \cdot n + 45 \cdot k^2 \cdot n^2 - 15 \cdot n^3}{n^6} \\ 1 & -\dfrac{k}{n} & 3 & \dfrac{k \cdot (3 \cdot n - k^2)}{n^3} & 5 & -\dfrac{k \cdot (k^4 - 10 \cdot k^2 \cdot n + 15 \cdot n^2)}{n^5} & 7 & -\dfrac{k \cdot (k^6 - 21 \cdot k^4 \cdot n + 105 \cdot k^2 \cdot n^2 - 105 \cdot n^3)}{n^7} \end{bmatrix}$$

o fach abgeleitetes Q0 sieht aus wie um k=0 lokalisiertes Wellenpaket mit
o Nulldurchgängen

Nullstellen der Vorfaktoren f(o) der Ableitung o'ter Ordnung
f(0)=0 nie
f(1)=0 für k=0
f(2)=0 für $k=\pm\sqrt{n}$
f(3)=0 für k=0, $k=\pm\sqrt{3n}$
f(4)=0 für $k=\pm\sqrt{(3 \pm \sqrt{6})n}$ bzw $\pm 2.3344142183\ \sqrt{n}$, $\pm 0.74196378430\ \sqrt{n} = \pm\sqrt{n}\ /1.3477746773$
f(5)=0 für k = 0, $\pm\sqrt{(5 \pm \sqrt{10})n}$ bzw. $\pm 1.3556261799\ \sqrt{n}$, $\pm 2.8569700138\ \sqrt{n}$
f(6)=0 für k^2=11.050687484 n, 3.5689854970 n, 0.38032701840 n, also
k=$\pm 3.3242574334\ \sqrt{n}$, $\pm 1.8891758777\ \sqrt{n}$, $\pm 0.61670659020\ \sqrt{n}$ wobei 1/0.6167065902=1.6215166432
f(7)=0 für k^2 = 0, 14.065798076 n, 5.6015501083 n, 1.3326518154 n, also
k=0, $\pm 3.7504397176\ \sqrt{n}$, $\pm 2.3667594107\ \sqrt{n}$, $\pm 1.1544053947\ \sqrt{n}$
Die Abhängigkeit von n entfällt wenn wir nach $r = k/\sqrt{n}$ ableiten
dann ist $k = \sqrt{n} \cdot r$ und die Vorfaktoren der o-ten Ableitungen nach r sind (wie für n=1):

$$f(o) := \frac{\left(\frac{d}{dr}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(n,\ \sqrt{n} \cdot r)}{\mathrm{Q0E}(n,\ \sqrt{n} \cdot r)} \cdot = \cdot \frac{\left(\frac{d}{dr}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(1,\ r)}{\mathrm{Q0E}(1,\ r)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & r^2 - 1 & 4 & r^4 - 6 \cdot r^2 + 3 & 6 & r^6 - 15 \cdot r^4 + 45 \cdot r^2 - 15 \\ 1 & -r & 3 & 3 \cdot r - r^3 & 5 & -r^5 + 10 \cdot r^3 - 15 \cdot r & 7 & -r^7 + 21 \cdot r^5 - 105 \cdot r^3 + 105 \cdot r \end{bmatrix}$$

Anlass für diese Überlegung war die Darstellung der Vernichtungs- bzw- Erzeugungsoperatoren
b und b+ gemäß S.149 Haken/Wolf (9.87), wobeidas dortige Xi hier r ist
--- Verallgemeinernder Zusatz: dto., aber anstelle n nun s-faches von n,
d.h. Ableitung nach $r = k/\sqrt{n \cdot s}$, also $k = r \cdot \sqrt{n \cdot s}$; es resultiert

$$f(o) := \frac{\left(\frac{d}{dr}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(n,\ r \cdot \sqrt{n \cdot s})}{\mathrm{Q0E}(n,\ r \cdot \sqrt{n \cdot s})}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & r^2 \cdot s^2 - s & 4 & r^4 \cdot s^4 - 6 \cdot r^2 \cdot s^3 + 3 \cdot s^2 & 6 & r^6 \cdot s^6 - 15 \cdot r^4 \cdot s^5 + 45 \cdot r^2 \cdot s^4 - 15 \cdot s^3 \\ 1 & -r \cdot s & 3 & 3 \cdot r \cdot s^2 - r^3 \cdot s^3 & 5 & -r^5 \cdot s^5 + 10 \cdot r^3 \cdot s^4 - 15 \cdot r \cdot s^3 & 7 & -r^7 \cdot s^7 + 21 \cdot r^5 \cdot s^6 - 105 \cdot r^3 \cdot s^5 + 105 \cdot r \cdot s^4 \end{bmatrix}$$

1.14 ***Horizontale Ableitungen (entlang k) und Hermite Polynome:***

es ist $\cdot \mathrm{Q0E}\left(\frac{1}{2},\ k\right) = \frac{2 \cdot \hat{e}^{-k^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot$; Setzen wir also

$$\mathrm{HERMP}(o,k) := \frac{(-1)^o \cdot \left(\frac{d}{dk}\right)^o \mathrm{Q0E}\left(\frac{1}{2}, k\right)}{\mathrm{Q0E}\left(\frac{1}{2}, k\right)} \cdot = \cdot \frac{(-1)^o \cdot \left(\frac{d}{dk}\right)^o \mathrm{Q0E}(1, \sqrt{2}\cdot k)}{\mathrm{Q0E}(1, \sqrt{2}\cdot k)}$$

so entsprechen für alle o in N0 die HERMP(o,k) den o ten hermiteschen Polynomen
hier eine kurze Tabelle für die ersten o:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4\cdot k^2 - 2 & 4 & 16\cdot k^4 - 48\cdot k^2 + 12 & 6 & 64\cdot k^6 - 480\cdot k^4 + 720\cdot k^2 - 120 \\ 1 & 2\cdot k & 3 & 8\cdot k^3 - 12\cdot k & 5 & 32\cdot k^5 - 160\cdot k^3 + 120\cdot k & 7 & 128\cdot k^7 - 1344\cdot k^5 + 3360\cdot k^3 - 1680\cdot k \end{bmatrix}$$

1.15 zweifaches Integral über dk = Integral über dn

$$\mathrm{ERF}(x) = \int \frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot \hat{e}^{x^2}} dx$$

$$\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dk = \mathrm{ERF}\left(\frac{k\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2}\cdot|n|}\right)\cdot \mathrm{SIGN}(n) = \mathrm{ERF}\left(\frac{k}{\sqrt{(2\cdot n)}}\right)\cdot \text{letzt. ohne Vorzeichen}$$

Gaus Normalkurve definition:

$$\mathrm{FNORMAL}(k) := 0.5\cdot \mathrm{ERF}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

folg. Zeile Analogie zu 1. Maxwell? (Integrationskonstanten weggelassen)

$$\int\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dk\, dk = \frac{\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dn}{2} = k\cdot\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dk + n\cdot \mathrm{Q0E}(n,k)$$

nun abwechselnd int, diff n,k, integrationskonstanten wie üblich weggelassen

$$\frac{d}{dn}\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dk = \left(-\frac{k}{2\cdot n}\right)\cdot \mathrm{Q0E}(n,k)$$

$$\frac{d}{dk}\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dn = 2\cdot\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dk$$

oder gleichbedeutend:

$$\frac{d}{dk}\frac{d}{dk}\int \mathrm{Q0E}(n,k)\, dn = \frac{d}{dk}\int \frac{d}{dk}\mathrm{Q0E}(n,k)\, dn = \int \frac{d}{dk}\frac{d}{dk}\mathrm{Q0E}(n,k)\, dn = 2\cdot \mathrm{Q0E}(n,k)$$

$$\frac{d}{dk}\frac{d}{dk}\mathrm{Q0E}(n,k) = 2\cdot\frac{d}{dn}\mathrm{Q0E}(n,k)$$

(ob. Schrödingergleichung? Urs. für 3d?); vgl auch Haken Einf. Synergetik S. 86 unten

1.16 nun allgemein (gültig auch für Q1E):

$$2^x\cdot\left(\frac{d}{dn}\right)^x \mathrm{Q0E}(n,k) = \left(\frac{d}{dk}\right)^{2\cdot x}\mathrm{Q0E}(n,k)$$

((genannte anal. Darstellung mit Potenz von 2 nur für k<<n; für k=n gilt
d/dk Q0E = (1-n)/2; d/dn Q0E =(1 -(n+2)/4)/2 =(2-n)/8
im Rand geht d^2/dk^2 / (d/dn) gegen 4, also Potenz von 4 für n->∞:

$$\frac{4}{n-2} + 4 = \frac{4\cdot(n-1)}{n-2}\cdot = (1-n)\,/\,2\,/\,((2-n)\,/\,8)$$

die obigen Ableitungsregeln gelten nur für p=0.5

nun, falls pli<> Pre: genau nur für (k + n) / 2 − n p << n

$$Q0EP(n, k, p) := \frac{1}{\sqrt{(2\cdot\pi\cdot n\cdot p\cdot(1-p))}}\cdot \hat{e}^{-((k+n)/2-n\cdot p)^2/(2\cdot n\cdot p\cdot(1-p))}$$

1.17 Nun Grenzwerte für n->∞; stirlingformel

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{1/2} Q0Z(2\cdot m)}{\sqrt{\left(\frac{8\cdot n^3}{9\cdot\pi}\right)}}, \frac{\sum_{m=0}^{n/2} Q0Z(2\cdot m)}{\sqrt{\left(\frac{2\cdot n}{\pi}\right)}}, \frac{Q0Z(n)}{\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\cdot n}\right)}}, -\frac{Q2Z(n)}{\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\cdot n^3}\right)}}\right] = [1, 1, 1, 1]$$

hierbei gilt für gerade n:

$$Q0Z(n) = \sum_{m=0}^{n/2} Q2Z(2\cdot m)$$

Vorfaktoren zur wechselseitigen Umrechnung:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\cdot n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2\cdot n}{\pi}\right)^{-1}}$$

für n->∞ also: π/2 √... = π/2 Q0Z(n) = (Σ(Q0Z(2•m), m, 0, n/2)^−1 = 1/(1/√...)
oder (für n->∞): Q0Z((2/π)^2 * n) = (Σ(Q0Z(2•m), m, 0, n/2))^−1

$$-\frac{3\cdot\pi}{4}\cdot\left(-\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\cdot n^3}\right)}\right) = \sqrt{\left(\frac{8\cdot n^3}{9\cdot\pi}\right)^{-1}}$$

Grenzw für x nahe 1 bei Gleichsetzung Q0Z(2n,0) mit sqrt; aus

$$\sqrt{(1-(1-dx)^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi\cdot n}\right)} = Q0Z(2\cdot n)\cdot folgt$$

$$2\cdot dx - dx^2 = \frac{1}{\pi\cdot n}\cdot \text{fuer kleine x gilt approximativ also:}$$

$$dx = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot n}$$

(Speichenring); nun analog ausgehend von sum(Q0Z) = 1/sqrt:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-(1-dx)^2)}} = \sqrt{\left(\frac{4\cdot n}{\pi}\right)}\cdot \text{ also approx } 1 / (2\ dx) = 4\ n / \pi \text{ und}$$

$$dx = \frac{\pi}{8\cdot n}$$

1.18 Fakultät als Ausdruck der Q0Z (Stirling)

$$\frac{Q0Z(n)}{2\cdot\left(\frac{n}{\hat{e}}\right)^n} = \frac{1}{n!} - 0\cdot 1/\sqrt{=}\Sigma\ Q0Z(2n)/(c/v)\text{^}2n\ \ \text{->}\ n/\hat{e}\ \text{prop}\ c/v\ ?$$

$$FAK(x) := \sqrt{(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot x^x\cdot\hat{e}^{-x}$$

$$FS(x) := \frac{FAK(x)}{2^{x}\cdot FAK\left(\frac{x}{2}\right)^{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}}\cdot$$ also Q0Z(2x)=1/√(πx)

$$\frac{d}{dx}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{\pi}\cdot x^{3/2}}\cdot\omega - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot(x-1)\cdot\sqrt{(\pi\cdot x)}}\cdot$$ ω−0.5*Q2Z (x); Q0Z(2x)' entspricht also Po(2x) für x->∞

$$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}}\ dx = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\cdot$$;2√(x/π)=2ΣQ0Z(2k) 0..2x

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+1)}}{\sqrt{\pi}}\cdot$$ ω (x+1)*Q0Z(x)=SUM(Q0Z(2*k),k,0,x/2) für x->∞ also ca 0.5*(ob. Integral)

$$\left(\sum_{x=1}^{n} x^{0.5}\right)\cdot$$ ->(n^1.5)/1.5 für n->∞

$$\left(\sum_{x=1}^{n} x^{1.5}\right)\cdot$$ ->(n^2.5)/2.5 für n->∞

$$\left(\sum_{x=1}^{n} x^{a}\right)\cdot$$ ->(n^(a+1))/(a+1) für n->∞ (Integralbildung)

nun Q0Z(n(t),0) für große t und t=√(2n/π), also n = π t^2 / 2:
Q0Z(n(t))=√(2 / (π (π t^2 / 2)))= 2 / (π t)
−Q2Z(n(t))= √(2 / (π (π t^2 / 2)^3)) = 4 / (π^2 t^3)
die vertikale DoppelzeilenSumme aller Pquadrate geht gegen ln(n)/π (Hälfte, da nur jede 2. Zeile)
F (x) := Σ (Q0 (2 n, 0)^2, n, 1, x): F (18)=0.99935564340, f(19)=1.0158898280
F (137)=1.6340932026, ln(139.04563666)/π = π/2

nun F (x) := Σ (Q0 (2 n, 0)^2, n, 1, x) interpoliert um 18.0, wo 1 überschritten wird:
FIT [[x, a4 x^4 + a3 x^3 + a2 x^2 + a1 x + a0], [16, 0.9634648312], [17, 0.98191564144], [18, 0.9993556434], [19, 1.015889828], [20, 1.0316076374]]

$$FF(x) := -6.7899589629\cdot10^{-7}\cdot x^{4} + 6.5090830102\cdot10^{-5}\cdot x^{3} - 0.0026470597579\cdot x^{2} + 0.064836369965\cdot x + 0.38161683363$$

FF (x) = 1 für x = 18.038010556 bzw 2x=36.076021111

1.19 Grenzwert Summe aller 1/x geht gegen ln(x)+Euler_konstante:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x}}{LN(n) + 0.577215665} = 1$$

$$ê^{a + î\cdot b} = ê^{a}\cdot COS(b) + î\cdot ê^{a}\cdot SIN(b)$$

$$LN(a + î\cdot b) = LN(\sqrt{(a^{2} + b^{2})}) - î\cdot\left(\frac{\pi\cdot SIGN(b)\cdot(SIGN(a) - 1)}{2} - ATAN\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$LN(a + î\cdot b) = LN(\sqrt{(a^{2} + b^{2})}) + î\cdot ATAN\left(\frac{b}{a}\right)\cdot$$ für a > 0

1.20 nun Zusammenhang Q0Z,√(1-x^2) für große n bzw x->1

Substitution 1-dx=x; 2 Möglichk: √=-Q0Z(2n) oder 1/√=ΣQ0Z(2n)

$$\sqrt{(1 - (1 - dx)^{2})} = -\sqrt{\left(\frac{1}{\pi\cdot n}\right)}\cdot$$ − da Σ−Q2Z=1−Q0Z; für dx->0 folgt dx = 1 / (2 π n)

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - (1 - dx)^{2})}} = \sqrt{\left(\frac{2\cdot(2\cdot n + 1)}{\pi}\right)}\cdot$$ für dx->0 folgt dx = π / (8 n)

hier n(t) eingesetzt: π / (8 (π t^2 / 2)) = 1 / (4 t^2)

Zusammenhang zwischen Q0 und Asin:

$$\mathrm{TAYLOR}\left(\frac{\mathrm{ASIN}(x)}{x}, x, 0, 7\right) = \frac{5\cdot x^6}{112} + \frac{3\cdot x^4}{40} + \frac{x^2}{6} + 1$$

$$\frac{\mathrm{ASIN}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Q0P}\left(2\cdot n, 0, \frac{1 + \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)}{2\cdot n + 1}$$

1.21 nun integral von Q0E nach dk

$$\int \mathrm{Q0E}(n, k)\, dk = \mathrm{ERF}\left(\frac{k}{\sqrt{(2\cdot n)}}\right)$$

Integral = ERF $(k / \sqrt{(2)})$ = 0.25 für k = 0.31863936397 = 1/3.1383442006

Q0 über k=−n...n als Nachrichtenquelle; Abschätzung der Information

$$\mathrm{Q0EI}(n, x) := -2\cdot\int_0^x \mathrm{Q0E}(n, k)\cdot \mathrm{LN}(\mathrm{Q0E}(n, k))\, dk$$

$$\mathrm{Q0EI}(n, x) := -2\cdot\int_0^x \frac{\sqrt{2}\cdot \hat{e}^{-k^2/(2\cdot n)}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{LN}\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)}{2} - \frac{k^2}{2\cdot n}\right) dk$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Q0EI}(n, n)}{\mathrm{LN}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Q0EI}(n, \infty)}{\mathrm{LN}(n)} = 1$$

nun diskrete Abschätzung

$$\mathrm{Q0I}(n, x) := -2\cdot \sum_{k=0}^{x/2} \mathrm{Q0}(n, 2\cdot k)\cdot \mathrm{LN}(\mathrm{Q0}(n, 2\cdot k))$$

mit f(n) := Q0I(n, n)/LN(n) folgt f(22)=0.8317; f(2000)=0.6049

1.22 Nun Zustandsintegrale Q0E bei verschiedenen Ableitungen

seien o,r ganze Zahlen groessergleich 0, welche den Ableitungsgrad quantifizieren; es ist

$$\int_{-n}^{n} \left(\left(\frac{d}{dk}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(n, k)\right)\cdot\left(\frac{d}{dk}\right)^{o + (2\cdot r + 1)} \mathrm{Q0E}(n, k)\, dk = 0$$

nun für geradzahlige Ableitungsabstufung:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{r}\cdot n^{o + r + 1/2}\cdot\int_{-n}^{n} \left(\left(\frac{d}{dk}\right)^{o} \mathrm{Q0E}(n, k)\right)\cdot\left(\frac{d}{dk}\right)^{o + 2\cdot r} \mathrm{Q0E}(n, k)\, dk = \frac{2\cdot\left(o + r - \frac{1}{2}\right)!}{\pi}$$

hierbei gilt

$$\frac{2\cdot\left(o+r-\frac{1}{2}\right)!}{\pi} = \frac{2\cdot(2\cdot(o+r))!}{4^{o+r}\cdot(o+r)!\cdot\sqrt{\pi}} = \frac{2\cdot(o+r)!}{\sqrt{\pi}}\cdot Q0Z(2\cdot(o+r))\cdot =: f(o+r)$$

die Tabelle von f(x):=f(o+r)=2 (o + r − 1/2)! / π ist hierbei:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 2 & \frac{3}{2\cdot\sqrt{\pi}} & 4 & \frac{105}{8\cdot\sqrt{\pi}} & 6 & \frac{10395}{32\cdot\sqrt{\pi}} & 8 & \frac{2027025}{128\cdot\sqrt{\pi}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{\pi}} & 3 & \frac{15}{4\cdot\sqrt{\pi}} & 5 & \frac{945}{16\cdot\sqrt{\pi}} & 7 & \frac{135135}{64\cdot\sqrt{\pi}} & 9 & \frac{34459425}{256\cdot\sqrt{\pi}} \end{bmatrix}$$

1.23 -------- Für verschiedene p: Q0P- und Q0EP-Werte im Maximum k=n(2p-1):

$$Q0EP(n,\ n\cdot(2\cdot p-1),\ p) = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{(p-1)}\cdot\sqrt{(-p)}}$$

Minimum bei p=0.5: Q0EP(n, 0, 1/2)=√2/(√π·√n)
wegen analytischer Darstellung geht der Rand, d.h. Q0EP(n,n,1) gegen unendlich
anders hingegen bei diskreter Darstellung:

$$Q0P(n,\ n\cdot(2\cdot p-1),\ p) = \frac{p^{n\cdot p}\cdot(1-p)^{n\cdot(1-p)}\cdot n!}{(n\cdot p)!\cdot(n\cdot(1-p))!}$$

$$Q0P(n,\ n,\ 1) = 1$$

$$Q0P\left(n,\ 0,\ \frac{1}{2}\right) = Q0(n,\ 0) = \frac{2^{-n}\cdot n!}{\left(\frac{k}{2}+\frac{n}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n}{2}-\frac{k}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

$$Q0P\left(n,\ \frac{n}{2},\ \frac{3}{4}\right) = \frac{\left(\frac{27}{256}\right)^{n/4}\cdot n!}{\left(\frac{n}{4}\right)!\cdot\left(\frac{3\cdot n}{4}\right)!}$$

z.B. Q0P(2, 0, 1/2)=1/2, Q0P(200, 0, 1/2)=0.056348=1/17.74670

Q0P(2, 1, 3/4)=√3/π=0.55132889542179, Q0P(200, 100, 3/4)=0.06502948=1/15.37764040

--------- alt ab jetzt:

--------------Q0e unterteilt einschub; vorerst unbenutzt

nun Q0e für gerade n und unterteilt: qce

$$QCE(n,\ k) := Q0E(n,\ k)\cdot COS\left(\frac{k}{2}\cdot\pi\right)$$

nun Q0e für gerade n und unterteilt: qse

$$QSE(n,\ k) := Q0E(n,\ k)\cdot SIN\left(\frac{k}{2}\cdot\pi\right)$$

2 WQM2.mth: vorher WQMD.mth als utility laden

LOAD(wqmd.mth)
falls Summen (bzw Abweichungen) Konstanten ergeben,
können diese mit der Startwahrscheinlichkeit multipliziert werden,
welche hier auf Q0(0,0)=1.0 gesetzt wird
falls vor x Faktor 2, ergeben sich statt Wahrscheinlichkeiten Wegmöglichkeiten

$$\sqrt{(1-(2\cdot x)^2)} = 1 - 2\cdot x^2 - 2\cdot x^4 - 4\cdot x^6 \cdot ... \rightarrow \Sigma[-Q2Z(n)*2\verb|^|n]=\Sigma\ \text{Rausflußwege}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(2\cdot x)^2}} = 1 + 2\cdot x^2 + 6\cdot x^4 + 20\cdot x^6 \cdot + ... -> \Sigma[Q0Z(n)*2\text{^}n] = \Sigma \text{ aller Wege zur vert. Mitte}$$

nun Q0-Dreieck mit Pli=-Pre; Q0M=Q0-minus-plus: P nach li=neg
wegen Binomialentwicklung:

2.1 Hor. Quersumme in Zeile n = (Pre-Pli)^n= (Pre-(1-Pre))^n = (2Pre - 1)^n

$$\frac{\sum_{x=0}^{n/2} Q0M(2\cdot x, 0)}{\sum_{x=0}^{n/4} Q2Z(4\cdot x)} = \frac{\sum_{x=1}^{n/2} Q0M(2\cdot x, 0)}{\sum_{x=1}^{n/4} Q2Z(4\cdot x)} = \frac{\Sigma(aller)\cdot plusminusp}{\Sigma(aller)\cdot 2\cdot q2z\_} = 1\cdot \text{für } n = 4\ k$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{n/2+1} -Q2Z(2\cdot x)}{\left(\sum_{x=0}^{n/2} Q0M(2\cdot x, 0)\right) - \sum_{x=0}^{n/2+1} Q0M(2\cdot x, 0)} = \frac{\left(\sum_{x=1}^{n/2+1} \frac{Q0(2\cdot x - 1, 1)}{2\cdot x - 1}\right) - 1}{\left(\sum_{x=0}^{n/2} Q0M(2\cdot x, 0)\right) - \sum_{x=0}^{n/2+1} Q0M(2\cdot x, 0)} \cdot = \pm 1$$

=-1 für n=4k bzw 1 für n=4k+2, da Σ (-Q2Z (2 x), x, 0, n/2) = -Q0 (n, 0)

2.2 Binomialentwicklung von Potenzen ergibt horizontale Zeilensumme der Q0M:

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q0P\left(n, 2\cdot k, \frac{1-x}{2}\right)\cdot(-1)^{k+n/2} = x^n \cdot \text{für Plire=0.5 also 0}$$

$$\frac{4\cdot n\cdot \sum_{k=-n}^{0} Q1M(2\cdot n, 2\cdot k)}{Q0M(2\cdot n - 2, 0)} = \frac{2\cdot n\cdot mal\cdot hor\cdot \Sigma(q0mprausfl)}{q0mpzentral\cdot vor\cdot 2\cdot zeilen} \cdot = 1 \text{ für n gerade}$$

$$2\cdot\left(\sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q1M(n, -2\cdot k)\right)\cdot = \text{hor abw Q1M = 1 für n=2, sonst = 0 für n=2k}$$

für n=2k+1 geht ob. Summe gegen 0 für n->∞

2.3 Abhängigkeiten horizontaler Summen von Q0M und untereinander:

$$\frac{Q0M(2\cdot n - 1, 2\cdot k - 1)}{-2\cdot \sum_{x=k}^{n} Q0M(2\cdot n, 2\cdot x)} = \frac{q0mp\_\cdot eins\cdot zurück}{-2\cdot q0mp\_\cdot horsum\cdot ab\cdot rand} = 1$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} Q0M(2\cdot n, 2\cdot k)}{\sum_{k=0}^{n} Q0M(2\cdot n + 1, 2\cdot k + 1)} = \frac{horsumexclmitte\_geradezeile}{horsum\_ungeradezeinerseite} \cdot = 1 \text{ für } 2n>=2$$

nächste Zeile zeigt Q0MPzentral zu horSumQ0MPo bzw AbwQ0MP

$$\frac{Q0M(2\cdot n, 0)}{2\cdot(2\cdot n + 2)\cdot \sum_{k=-n-1}^{0} Q1M(2\cdot n + 2, 2\cdot k)} = \frac{Q0M(2\cdot n, 0)}{2\cdot \sum_{k=0}^{n+1} 2\cdot k\cdot Q0M(2\cdot n + 2, 2\cdot k)} = 1$$

nun: hor Σ (Q0Mp_mal_Q0Mp_next_zeile)/(Q0Mp_zentral_bei_dopp_n)

$$\frac{\sum_{k=-n}^{n} Q0M(2\cdot n, 2\cdot k)\cdot Q0M(2\cdot n + 1, 2\cdot k + 1)}{Q0M(4\cdot n + 2, 0)} = \frac{\sum_{k=-n-1}^{n+1} Q0M(2\cdot n + 1, 2\cdot k + 1)\cdot Q0M(2\cdot n + 2, 2\cdot k)}{Q0M(4\cdot n + 4, 0)} = 1$$

2.4 Einfache Summen

$$Q0Z(2\cdot n) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} - Q2Z(2\cdot j)\right)\cdot \text{also}$$

$$Q0Z(2\cdot n) = 1 - \sum_{m=1}^{n} - Q2Z(2\cdot m) = 2\cdot \sum_{k=-n}^{-1} Q1(2\cdot n, 2\cdot k) = \sum_{k=-n/2}^{n/2} Q0(n, 2\cdot k)^2$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{n/2} \frac{Q0Z(2\cdot x)}{2\cdot x - 1}}{-Q0Z(n)} = \frac{\sum_{x=0}^{n/2} - Q2Z(2\cdot x)}{-Q0Z(n)} = \frac{\text{summe}\cdot\text{aller}\cdot\text{rausfluß}\cdot Q0Z(0\cdot\text{bis}\cdot n)}{-Q0Z(n)}\cdot = 1 \text{ für n gerade}$$

$$\frac{\sum_{x=1}^{n/2} \frac{Q0Z(2\cdot x)}{2\cdot x - 1}}{1 - Q0Z(n)} = \frac{\sum_{x=1}^{n/2} - Q2Z(2\cdot x)}{1 - Q0Z(n)} = \frac{\text{summe}\cdot\text{aller}\cdot\text{rausfluß}\cdot Q0Z(1\cdot\text{bis}\cdot n)}{1 - Q0Z(n)}\cdot = 1 \text{ für n gerade}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{n/2} Q0Z(2\cdot x)}{(n + 1)\cdot Q0Z(n)} = \frac{\sum_{x=0}^{n/2 - 1} Q0Z(2\cdot x)}{n\cdot Q0Z(n)} = \frac{\Sigma(Q0Z(0\cdot\text{bis}\cdot n - 1))}{n\cdot Q0Z(n)} = \frac{\Sigma(Q0Z(0\cdot\text{bis}\cdot n))}{(n + 1)\cdot Q0Z(n)} = 1\cdot(\text{n gerade})$$

Bezug geradzahlige zu ungeradzahlige Q0Z:

$$(n + 1)\cdot Q0Z(n) = \frac{2}{\pi\cdot Q0Z(n + 1)}\cdot \quad \text{bzw.} \quad Q0Z\ (n)\ Q0Z\ (n + 1) = 2\ /\ (\pi\ (n + 1))$$

Q0 = Σhor Q1 gerade = Σhor Q1 next ung. Zeile:

$$Q0(2\cdot n, 0) = 2\cdot \sum_{k=-n}^{-1} Q1(2\cdot n, 2\cdot k) = 2\cdot \sum_{k=-n}^{0} Q1(2\cdot n + 1, 2\cdot k - 1)$$

$$Q0Z(2\cdot n) = \sum_{k=-n}^{n} |Q1(2\cdot n, 2\cdot k)|$$

Q0 als horizontale Summe der Q1 (gerade und ungerade Zeilenindices):

$$\frac{Q0(2\cdot n - 1, 2\cdot k - 1)}{2\cdot \sum_{x=-n}^{-k} Q1(2\cdot n, 2\cdot x)} = \frac{Q0(2\cdot n, 2\cdot k)}{2\cdot \sum_{x=-n-0.5}^{-k-0.5} Q1(2\cdot n + 1, 2\cdot x)} = 1$$

2 Σ (Rausflusshor excl 0) (zeile n) + Σ (Rausfl_vert bis incl n) = unvereinbar = 1:

$$2\cdot \sum_{k=-n}^{-1} Q1(2\cdot n, 2\cdot k) + \sum_{x=1}^{n} - Q2Z(2\cdot x) = 1$$

2.5 Q2Z als Ableitung

$$\frac{Q0Z(n) - Q2Z(n)}{Q0Z(n - 2)} = \frac{Q0Z(n) - Q0Z(n - 2)}{Q2Z(n)} = 1$$

Q0Z(n+2) und -Q2Z(n+2) in Abh. von Q0Z(n)

$$-\frac{(n - 1)\cdot Q2Z(n)}{Q0Z(n)} = \frac{(n + 1)\cdot Q0Z(n)}{(n + 2)\cdot Q0Z(n + 2)} = \frac{(n - 1)\cdot Q2Z(n)}{(n + 2)\cdot Q2Z(n + 2)} = 1$$

Q1M als Ableitung nach dk (Q0M=Q0 mit Vorzeichenwechsel -> Sum:=Diff):

$$\frac{Q0M(n, k) + Q0M(n, k + 2)}{2\cdot Q1M(n + 1, k + 1)} = -\frac{(Q0M(n, k) + Q0M(n, k + 2))\cdot(n + 1)}{2\cdot Q0M(n + 1, k + 1)\cdot(k + 1)} = 1$$

im Gegensatz dazu die bereits bekannte Summe:

$$\frac{Q0(n,k)+Q0(n,k+2)}{2\cdot Q0(n+1,k+1)} = \frac{Q0(n,k+2)-Q0(n,k)}{2\cdot Q1(n+1,k+1)} = 1$$

$$Q1(n,k+2)+Q1(n,k) = 2\cdot Q1(n+1,k+1)$$

2.6 1. Abl vert prop 2. Abl hor, vgl Q0E:

$$\frac{Q0(n,k-2)-2\cdot Q0(n,k)+Q0(n,k+2)}{4\cdot(Q0(n+2,k)-Q0(n,k))} = \frac{zweite\cdot abl\cdot hor}{2\cdot erste\cdot abl\cdot vert} = 1$$

wegen d/dn Q0Z(n) = Q2Z(n) entsprechen die zentralen Wahrscheinlichkeiten
im Dreieck der 2. Ableitung nach k (startend mit [1/4,0,-1/2,0,1/4])
daher --Q2Z(n)

2.7 1. Abl vert prop 2. Abl hor auch bei den Q1:

$$\frac{Q1(n,k-2)-2\cdot Q1(n,k)+Q1(n,k+2)}{4\cdot(Q1(n+2,k)-Q1(n,k))} = \frac{zweite\cdot abl\cdot hor}{2\cdot erste\cdot abl\cdot vert} = 1$$

aufgrund der Schrittweite von dk=2 bzw dn=2 kommt je Ableitung Faktor 2 dazu->
daher wird -4 im Nenner zu -2 bei Betrachtung der Ableitung
-> 2. Abl der Q0 nach dk = 1. Abl der Q1 nach dk = 2 mal 1. Abl der Q0 nach dn

$$\frac{Q1(n,k+2)-Q1(n,k)}{2\cdot(Q0(n+1,k+1)-Q0(n-1,k+1))} = \frac{abl\cdot q1\_\cdot nach\cdot dk}{2\cdot mal\cdot abl\cdot p\cdot nach\cdot dn} = 1$$

2.8 Differenzen nach dk:

$$Q0(n,k+2)-Q0(n,k) = -\frac{2\cdot(k+1)}{n+1}\cdot Q0(n+1,k+1) = 2\cdot Q1(n+1,k+1)$$

$$Q0(n,k+1)-Q0(n,k-1) = -\frac{2\cdot k}{n+1}\cdot Q0(n+1,k) = 2\cdot Q1(n+1,k)$$

$$Q0(n,k+2)-Q0(n,k-2) = -\frac{4\cdot k}{n+2}\cdot Q0(n+2,k) = 4\cdot Q1(n+2,k)$$

$$Q0(n-1,k+1)-Q0(n-1,k-1) = -\frac{2\cdot k}{n}\cdot Q0(n,k) = 2\cdot Q1(n,k)$$

$$Q0(n,k+2)-Q0(n,k) = -\frac{2\cdot(k+1)}{n-k}\cdot Q0(n,k+2) = -\frac{2\cdot(k+1)}{k+n+2}\cdot Q0(n,k)$$

$$\frac{Q1(n,k+1)-Q1(n,k-1)}{Q1(n+1,k)} = -\frac{2\cdot(k^2-n-1)}{k\cdot n} = -\frac{2\cdot k}{n}+\frac{2}{k\cdot n}+\frac{2}{k}$$

2.8.1 Differenzen nach dk für Q0P:

$$\frac{Q0P(n-1,k+1,p)-Q0P(n-1,k-1,p)}{Q0P(n,k,p)} = \frac{k+n\cdot(1-2\cdot p)}{2\cdot n\cdot p\cdot(p-1)}$$

durch Einsetzen von p=((1 + k/n) / 2),also 2p-1=k/n, erhält man daraus

$$Q0P\left(n-1,k+1,\frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right) - Q0P\left(n-1,k-1,\frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right) = 0$$

hierbei gilt k/n / $\sqrt{(1-x^2)}$ -> 1 für n->inf

2.9 Differenzen nach dn:

$$\frac{Q0(n+1,k)-Q0(n-1,k)}{Q0(n+1,k)} = \frac{k^2-n-1}{n\cdot(n+1)} = \frac{k^2}{n\cdot(n+1)} - \frac{1}{n}$$

für grosse k und n geht die rechte Seite gegen k^2/n^2
für k=0 gilt (analog Energie H-Atom mit Hauptquantenzahl n):

$$\left(\frac{Q0(n+1,0)-Q0(n-1,0)}{Q0(n+1,0)}\right)^2 = \left(\frac{Q0Z(n+1)-Q0Z(n-1)}{Q0Z(n+1)}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$Q1(n+2,k)-Q1(n,k) = \frac{k^2-3\cdot n-4}{n\cdot(n+1)}\cdot Q1(n+2,k) = -\frac{k^2-3\cdot n-4}{(k-n-2)\cdot(k+n+2)}\cdot Q1(n,k)$$

Im Fall k=0 entspricht die vertikale (zeitliche) Differenz
der halben horizontalen (örtlichen) Differenz:

$$Q1(n+1,1) = Q0(n+2,0)-Q0(n,0) = \frac{1}{2}\cdot(Q0(n,2)-Q0(n,0))$$

bei den Q1 gilt

$$2\cdot n\cdot(Q1(n+2,1)-Q1(n,1)) = 3\cdot(Q1(n+1,0)-Q1(n+1,2))$$

Zusatz: Q0 eins neben Mitte in Abh von vorheriger und nächster Zeile, n=gerade oder ungerade:

$$-\frac{2\cdot Q0(n+2,2)}{Q0(n,0)+Q0(n,2)-4\cdot Q0(n+4,0)} = 1$$

2.9.1 Schräge Differenzen:

$$Q0P(n,k,p)-Q0P(n-1,k-1,p) = \left(-\frac{k+n\cdot(1-2\cdot p)}{k+n}\right)\cdot Q0P(n-1,k-1,p) = \left(-\frac{k+n\cdot(1-2\cdot p)}{2\cdot n\cdot p}\right)\cdot Q0P(n,k,p)$$

$$Q0P(n,k,p)-Q0P(n-1,k+1,p) = \frac{k+n\cdot(1-2\cdot p)}{n-k}\cdot Q0P(n-1,k+1,p) = \frac{k+n\cdot(1-2\cdot p)}{2\cdot n\cdot(1-p)}\cdot Q0P(n,k,p)$$

2.10 nun Verhältnis horizontal benachbarter Q0:

$$\frac{Q0(n,k+2)}{Q0(n,k)} = \frac{n-k}{n+k+2} = 1 - \frac{2\cdot(k+1)}{n+k+2}$$

$$\frac{Q0P(n,k+2,pr)}{Q0P(n,k,pr)} = \frac{pr\cdot(k-n)}{(pr-1)\cdot(k+n+2)}$$

=1 für pr = (k + n + 2) / (2 (n + 1)) oder k = n (2 pr − 1) + 2 (pr − 1)

oder 1−pr = (n − k) / (2 (n + 1))

2.11 Verhältnis schräg aufeinanderfolgender Q0P

$$Q0P(n,k,p) = \frac{2\cdot n\cdot p}{k+n}\cdot Q0P(n-1,k-1,p) = \frac{k+n+2}{2\cdot p\cdot(n+1)}\cdot Q0P(n+1,k+1,p)$$

$$Q0P(n,k,p) = \frac{2\cdot n\cdot(1-p)}{n-k}\cdot Q0P(n-1,k+1,p) = \frac{-k+n+2}{2\cdot(n+1)\cdot(1-p)}\cdot Q0P(n+1,k-1,p)$$

2.12 Verhältnis (vertikal) aufeinanderfolgender Q0:

$$\frac{Q0(n+2,k)}{Q0(n,k)} = -\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{(k-n-2)\cdot(k+n+2)} = \frac{n+1}{2\cdot(k+n+2)} - \frac{n+1}{2\cdot(k-n-2)}$$

$$\frac{Q0P(n+2,k,pr)}{Q0P(n,k,pr)} = \frac{4\cdot pr\cdot(pr-1)\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(k-n-2)\cdot(k+n+2)}$$

sonderfall für k=0:

$$\frac{Q0Z(n+2)}{Q0Z(n)} = \frac{Q0(n+2,\,0)}{Q0(n,\,0)} = \frac{n+1}{n+2}$$

2.13 *Mittlere Abweichung horizontal (Drehmoment, Maxwell)*

(proportional Standardabweichung σ=√(np(1−p);
für p=0.5 und große n: σ=0.5√n= √(π/8)* √(2n/π); wobei √(2n/π) = ΣQ0Z(2k) 0..n/2 = Abw
exakt bei n=geradzahlig:

$$\frac{2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q0(n,\,2\cdot k)}{\sum_{x=0}^{(n-2)/2} Q0Z(2\cdot x)} = \frac{2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q0(n,\,2\cdot k)}{n\cdot Q0Z(n)} = \frac{mittl\cdot abw\_beidseits\cdot(zeile\cdot n)}{\Sigma(Q0Z(0\cdot bis\cdot n-2))} = 1$$

oder für ganzzahlige n nach Verdoppelung:

$$\frac{2\cdot\sum_{k=0}^{n} 2\cdot k\cdot Q0(2\cdot n,\,2\cdot k)}{\sum_{x=0}^{n-1} Q0Z(2\cdot x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2\cdot k\cdot Q0(2\cdot n,\,2\cdot k)}{n\cdot Q0Z(2\cdot n)} = \frac{mittl\cdot abw\_beidseits\cdot(zeile\cdot 2\cdot n)}{\Sigma(Q0Z(0\cdot bis\cdot 2\cdot n-2))} = 1$$

2.14 *mittlere Abweichung der Q1 ist konstant (***)*

$$-2\cdot\sum_{k=-n/2}^{0} 2\cdot k\cdot Q1(n,\,2\cdot k) = 1\cdot n \text{ natural number}$$

$$-2\cdot\sum_{k=-n}^{0} 2\cdot k\cdot Q1(2\cdot n,\,2\cdot k) = -2\cdot\sum_{k=-n}^{0} (2\cdot k-1)\cdot Q1(2\cdot n+1,\,2\cdot k-1) = 1$$

$$-\sum_{k=-n}^{n} 2\cdot k\cdot Q1(2\cdot n,\,2\cdot k) = -\sum_{k=-n}^{n+1} (2\cdot k-1)\cdot Q1(2\cdot n+1,\,2\cdot k-1) = 1$$

dies und das Folgende gilt in änlicher Weise auch für variable p, vgl wqm7
Mittl Abw vom Rand aus genauso weit weg wie vom Ursprung:
(sonderfall vom allg Erwartungswert = np)

$$\frac{\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k+n)\cdot Q0(n,\,2\cdot k)}{n} = \frac{abw\cdot vom\cdot rand}{n} = 1$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (-2\cdot k-n)\cdot Q1(n,\,2\cdot k) = 1\cdot\text{= hor. Abw der Q1 für } n > 0$$

$$\frac{2\cdot\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k+n)\cdot Q1(n,\,2\cdot k)^2}{Q0(2\cdot n-2,\,0)} = \frac{2\cdot hor\cdot abw\cdot der\cdot q1quadrate\cdot vom\cdot rand}{q0zentral\cdot bei\cdot(2\cdot n-2)} = 1$$

2.15 *Momente n-ter Ordnung der Q0M:*

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q0M(n,\,2\cdot k) = Q0M(n-2,\,0)\cdot\text{=hor. Abweichung der Q0M beids., exakt bei n gerade}$$

hor Abw. mit um 1 vergr. k ergibt ± −Q2Z; exakt für n > 0 und gerade:

$$-2\cdot\sum_{k=0}^{n/2} (2\cdot k+1)\cdot Q0M(n,\,2\cdot k) = \frac{Q0M(n,\,0)}{n-1} = Q1M(n-1,\,-1)\cdot\text{=}Q1MZ(n)$$

$$2\cdot\left(\sum_{k=0}^{n/2} (2\cdot k)^2\cdot Q0M(n,\,2\cdot k)\right)\cdot\text{=2 für n=2, sonst =0 für gerades n}$$

$$2\cdot\left(\sum_{k=0}^{n/2} (2\cdot k+1)^3\cdot Q0M(n,\,2\cdot k+1)\right)\cdot\text{=−1 für n=1, =−6 für n=3, sonst=0 für ungerades n}$$

$$2\cdot\left(\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k)^4\cdot Q0M(n,2\cdot k)\right)\cdot{=}8 \text{ für } n=2, =24 \text{ für } n=4, \text{ sonst } =0 \text{ für gerades } n$$

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k+1)^5\cdot Q0M(n,2\cdot k+1)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & -120 & 9 & 0 & 13 & 0\\ 3 & -60 & 7 & 0 & 11 & 0 & 15 & 0\end{bmatrix}$$

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k)^6\cdot Q0M(n,2\cdot k)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 480 & 8 & 0 & 12 & 0\\ 2 & 32 & 6 & 720 & 10 & 0 & 14 & 0\end{bmatrix}$$

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k)^n\cdot Q0M(n,2\cdot k)=n!\cdot \text{für gerades } n$$

$$2\cdot\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k+1)^n\cdot Q0M(n,2\cdot k+1)=-n!\cdot \text{für ungerades } n$$

genaueres Äquivalent Summe 1/x als Abw vom Rand der Q0M:

$$-\frac{2^{n+1}\cdot\displaystyle\sum_{k=-n/2+1}^{n/2}\frac{Q0M(n,2\cdot k)}{2\cdot k+n}}{\displaystyle\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x}}=-\frac{2^{n+1}\cdot summe\cdot aller\cdot randabwkehrwerte}{summe\cdot aller\cdot kehrwerte\cdot 1\cdot bis\cdot n}=1$$

2.16 mittleres Abweichungsquadrat horizontal (trägheitsmoment, Maxwell)

Varianz:

$$\frac{2\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{n/2}(2\cdot k)^2\cdot Q0(n,2\cdot k)}{n}=\frac{4\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{n/4}(4\cdot k)^2\cdot Q0(n,4\cdot k)}{n}=1\cdot n \text{ gerade}$$

folg. ist einseitiges Abweichungsquadrat der Q1:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=-n}^{0}(2\cdot k)^2\cdot Q1(2\cdot n,2\cdot k)}{\displaystyle\sum_{x=0}^{n-1}Q0(2\cdot x,0)}=\frac{halbs\cdot summe\cdot po\_abweichungsquadrate\cdot hor}{summe\cdot Q0Z(2\cdot n)\cdot bis\cdot n-1}=1$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=-n}^{0}(2\cdot k)^2\cdot Q1(2\cdot n,2\cdot k)}{2\cdot n\cdot Q0(2\cdot n,0)}=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2\cdot k)^3\cdot Q0(2\cdot n,2\cdot k)}{(2\cdot n)^2\cdot Q0(2\cdot n,0)}=1$$

dto vom Rand aus

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=-n/2}^{n/2}(2\cdot k+n)^2\cdot Q0(n,2\cdot k)}{n\cdot(n+1)}=\frac{abwquadrat\cdot vom\cdot rand}{n\cdot(n+1)}=1$$

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=-n/2}^{n/2}(2\cdot k-n)^2\cdot Q1(n,2\cdot k)}{2\cdot n}=\frac{horiz\cdot abwquadrat\cdot q1\_\cdot vom\cdot rand}{2\cdot n}=1$$

2.17 abwkubiki wieder von Mitte, n gerade:

$$\frac{2\cdot\displaystyle\sum_{k=-n/2}^{0}-(2\cdot k)^3\cdot Q1(n,2\cdot k)}{3\cdot n-2}=\frac{beids\cdot summe\cdot po\_abweichungskubiki\cdot hor}{3\cdot n-2}=1$$

$$\sum_{k=-n}^{0}(2\cdot k)^3\cdot Q1(2\cdot n,2\cdot k)=1-3\cdot n\cdot \text{ n ganzzahlig}$$

2.18 abweichung vertikal (Drehmoment?) (f*r) oder besser Impuls (F*t) und Quadrate, n gerade

$$\frac{(2\cdot n + 1)\cdot(2\cdot n - 1)\cdot(-Q2Z(2\cdot n))}{\sum_{x=0}^{n} Q0Z(2\cdot x)} = \frac{(2\cdot n + 1)\cdot Q0(2\cdot n, 0)}{\sum_{x=0}^{n} Q0Z(2\cdot x)} = \frac{eine\cdot q0\_abw\_vert\cdot(0\cdot bis\cdot 2\cdot n + 1)}{mittl\cdot q1\_abw\_vert} = 1$$

folgende Aufsummantion über Abw unvereinbarer Wahrscheinlichkeiten interessant, da
vertikale Summe (Q1) nacheinander und vergangen, dagegen horizontale Summe gleichzeitig und gegenwärtig(***):
für folg −Q2Z(0)=−1 wichtig:

$$\frac{2\cdot \sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q0(n, 2\cdot k)}{\sum_{x=0}^{(n-2)/2} (2\cdot x - 1)\cdot(-Q2Z(2\cdot x))} = \frac{beids\cdot hor\cdot abw\cdot der\cdot Q0(n, k)}{vert\cdot abw\cdot der\cdot q1\_\cdot vor\cdot rausfl}\cdot n \text{ gerade}$$

$$\frac{6\cdot \sum_{x=0}^{n/2} x\cdot Q0(2\cdot x, 0)}{n\cdot \sum_{x=0}^{n/2} Q0(2\cdot x, 0)} = \frac{6\cdot mittl\cdot p\_abweichung\cdot vert}{n\cdot summe\cdot aller\cdot Q0Z(vert)} = 1\cdot \text{=nextline, n gerade}$$

oder Σ Q0 anders ausgedrückt:

$$\frac{6\cdot \sum_{x=0}^{n/2} x\cdot Q0(2\cdot x, 0)}{n\cdot(n + 1)\cdot Q0Z(n)} = \frac{6\cdot \sum_{x=0}^{n/2} x\cdot Q0(2\cdot x, 0)}{n\cdot(n^2 - 1)\cdot(-Q2Z(n))} = \frac{3\cdot \sum_{m=0}^{n} 2\cdot m\cdot Q0Z(2\cdot m)}{2\cdot n\cdot(2\cdot n + 1)\cdot Q0Z(2\cdot n)} = 1$$

daraus folgt übrigens Zusammenhang mit hor Abw:

$$\frac{3\cdot \sum_{x=0}^{n/2} x\cdot Q0(2\cdot x, 0)}{(n + 1)\cdot \sum_{k=0}^{n/2} 2\cdot k\cdot Q0(n, 2\cdot k)} = \frac{3\cdot abw\_vert}{(n + 1)\cdot abw\_hor\_einseits} = 1\cdot n \text{ gerade}$$

$$\frac{15\cdot \sum_{x=0}^{n/2} (2\cdot x)^2\cdot Q0(2\cdot x, 0)}{(4\cdot n + 3\cdot n^2)\cdot \sum_{x=0}^{n/2} Q0(2\cdot x, 0)} = \frac{15\cdot summe\cdot aller\cdot p\_abwquadrate\cdot vert}{(4\cdot n + 3\cdot n^2)\cdot summe\cdot aller\cdot Q0Z(vert)} = 1\cdot n \text{ gerade}$$

2.19 Summen vertikal parallel Mitte:

Sei sv0 die vertikale Summe (über n) der Q0(n,0) (in Mitte) und
sei svk die vertikale Summe (über n) der Q0(n,k) (k neben Mitte), dann gilt
sv0/svk>1 und sv0/svk−>1 für n−>∞
denn sv0−sv1 = ΣΣ Q1(n,2l) < ∞
denn letztere DoppelSumme ist begrenzt: es wird zwar über n von 0 bis ∞
summiert, aber über l nur von 0 bis k/2, also über k/2 beschränkte Summen
also gibt es ein M>0, so dass gilt sv0−sv1 < M
wegen sv0,sv1−>∞ für n−>∞ gilt also
lim (n−>∞) sv0/sv1 =
=lim (n−>∞) sv0/sv0 + (sv0−sv1)/sv1 < 1 + lim (n−>∞) M/sv1 = 1+0 = 1
moegliche Interpretation:
Aufsummation parallel Mitte bedeutet Pli=Pre, also Kraeftefreiheit
also unbeschleunigte Intertialsysteme und gleichberechtigte Zeit (ΣQ0(n,0))

2.20 Nun Summen bei start im Rand = verallgemeinerung von Start in Mitte

auch Bereich außerhalb Lichtkegel s. WPRAND

$$RANDSUMP(nstart, offset) := \sum_{ko=0}^{+offset} Q0(nstart + offset, nstart - offset + 2\cdot ko)$$

$$RANDSUMPO(nstart, offset) := \sum_{ko=0}^{+offset} Q1(nstart + offset, offset - nstart - 2\cdot ko)$$

$$\frac{RANDSUMP(n,x)}{\sum_{offset=0}^{x} RANDSUMPO(n,offset)} = \frac{\Sigma(Q0Z(n))\cdot horiz\cdot bei\cdot start\cdot IM(rand)}{\Sigma(vert)\cdot\Sigma(q1\_\cdot hor)\cdot bei\cdot start\cdot IM(rand)} = 1$$

Summe der Q0 parallel Rand ergibt $1/(1\pm x)$ für Pli=1−x bzw Pre=x

vgl wtayede, $|x|<1$; // Σ <-> Polynomkoeff. bei Versatz auf Entwicklungspunkt x

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q0P(n+k, n-k, 1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q0P(n+k, n-k, 1-x) = \frac{1}{1-x}$$

sei z.B.:

$$SQUER(n) := \sum_{k=0}^{6} Q0P(n+k, n-k, 1-x)$$

so ergibt sich:

$$SQUER(0) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$SQUER(1) = (1-x)\cdot(7\cdot x^6 + 6\cdot x^5 + 5\cdot x^4 + 4\cdot x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1)$$

$$SQUER(2) = (1-x)^2\cdot(28\cdot x^6 + 21\cdot x^5 + 15\cdot x^4 + 10\cdot x^3 + 6\cdot x^2 + 3\cdot x + 1)$$

$$SQUER(3) = (1-x)^3\cdot(84\cdot x^6 + 56\cdot x^5 + 35\cdot x^4 + 20\cdot x^3 + 10\cdot x^2 + 4\cdot x + 1)$$

$$SQUER(4) = (1-x)^4\cdot(210\cdot x^6 + 126\cdot x^5 + 70\cdot x^4 + 35\cdot x^3 + 15\cdot x^2 + 5\cdot x + 1)$$

1. Faktor ist (1−x)^n, (also zunächst n Schritte nach li.)
2. Faktor ist Taylorreihe von 1/(1−x)^(n+1)
(bei p=(1+x) analog, nur eben (1+x) anstelle (1−x) im Ergebnis)

2.21 Zusammenfassend gilt fuer die schraege Summe der Q0P

$$\sum_{n=0}^{k+u} Q0P(n, n-2\cdot k, p) = (1-p)^k\cdot TAYLOR\left(\frac{1}{(1-p)^{k+1}}, p, u\right)$$

hierbei beschreibt u>0 die Anzahl der Glieder, und k >= 0; also gilt (für k>=0);

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q0P(n, n-2\cdot k, p) = \frac{1}{1-p}$$

2.22 Q1P allgemeiner Fall für verschiedene p:

$$Q1P(n,k,p) := Q0P(n,k,p)\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)$$

$Q1P(n, k, p) = (1-p)\cdot Q0P(n-1, k+1, p) - p\cdot Q0P(n-1, k-1, p)$
(test mit prausfluss=1 in wpoloch7; ok)
falls eine horizontale Seite repräsentativ für beide aufsummiert
(zB als Schätzung, weil andere Seite unzugänglich, die wirkliche Summe ergäbe nämlich stets 1 bzw −P(0,0)

$$2\cdot\sum_{k=-n}^{-1} Q1P(2\cdot n, 2\cdot k, p) + \left(\sum_{x=1}^{n} p\cdot Q1P(2\cdot x-1, -1, p)\right) - \sum_{x=1}^{n}(1-p)\cdot Q1P(2\cdot x-1, 1, p) = 2\cdot(1-p)$$

Wegen

$$Q0P(n,k,p) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k/2}\cdot(p\cdot(1-p))^{n/2}\cdot\frac{n!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n+k}{2}\right)!}$$

sind die Vorfaktoren von Q0 nach Q0P und umgekehrt:

$$Q0P(n, k, p) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k/2} \cdot (4 \cdot p \cdot (1-p))^{n/2} \cdot Q0(n, k)$$

$$Q0(n, k) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k/2}}{(4 \cdot p \cdot (1-p))^{n/2}} \cdot Q0P(n, k, p)$$

3 WQM3.mth: vorher WQMD.mth als utility laden

LOAD(wqmd.mth)
Wallische Produktformel:
definiert man

$$FFPI(n) := \frac{1}{n} \cdot \prod_{x=1}^{n} \left(\frac{2 \cdot x}{2 \cdot x - 1}\right)^2$$

so ergibt sich für FFPI:

$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & 2 & 3.5555555555 & 4 & 3.3436734693 & 6 & 3.2751010413 & 8 & 3.2412518708 \\ 1 & 4 & 3 & 3.4133333333 & 5 & 3.30239355 & 7 & 3.2557217452 & 9 & 3.2300364664 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & 40 & 3.1612885805 & 80 & 3.1514254223 & 120 & 3.1481444417 & 160 & 3.146505221 \\ 20 & 3.1811048855 & 60 & 3.1547097795 & 100 & 3.149456428 & 140 & 3.1472076404 & 180 & 3.1459590025 \end{bmatrix}$$

$$\pi = (\lim_{n \to \infty} FFPI(n)) \cdot \omega \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 9}\right)\right) \cdot \omega \text{ für } n=5$$

Näherung für für n=1000: 1.6207338308 = 1 / ((FFPI (1000) - π) 1000)^2
für n=137:1.6181900951=1 / ((FFPI (137) - π) 137)^2, nahe gold. Schnitt
setzt man n:=Radius, so ergibt sich

$$\pi \cdot n = \left(\lim_{n \to \infty} \prod_{x=1}^{n} \left(\frac{2 \cdot x}{2 \cdot x - 1}\right)^2\right) \cdot \omega \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 9}\right) \cdot \omega \text{ für } n=5$$

In diesem Zusammenhang erwΣhnenswerte Übereinstimmung von 1/Sommerfeldkonstante mit:

$$\left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 5}\right)^2 \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 7} = \frac{1}{Q0Z(6)^2 \cdot Q0Z(8)^2} = \frac{4194304}{30625} = 136.95686530612$$

$$\frac{4194304}{30625} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 137.036 \cdot fuer \cdot x = 1730.6804208788 = \frac{8388608}{4847}$$

ist wohl Zufall und nur eine von den vielen Spekulationen zur Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante.
Wuenschenwert wΣre ein direkter Bezug zu wichtigen physikalischen Gleichungen
z.B. zu einer diskreten Darstellung der Maxwell-Gleichungen

3.1 *Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten (Vert. Mitte) / (Vert. Mitte Doppelzeile daneben): da*

$$\frac{Q0(n, k)}{Q0(n, k+2)} = \frac{k + n + 2}{n - k}$$

gilt Q0 (n, 0) / Q0 (n, 0 + 2) = (n + 2) / n, also ebenso

$$\left(\frac{Q0(2, 0)}{Q0(2, 2)} \cdot \frac{Q0(6, 0)}{Q0(6, 2)} \cdot \frac{Q0(10, 0)}{Q0(10, 2)}\right)^4 \cdot \left(\frac{Q0(14, 0)}{Q0(14, 2)}\right)^2 = 136.9568653$$

bzw. Q0 (n, 1) / Q0 (n, 1 + 2) = (n + 3)/ (n - 1), also

$$\left(\frac{Q0(5, 1)}{Q0(5, 3)} \cdot \frac{Q0(13, 1)}{Q0(13, 3)} \cdot \frac{Q0(21, 1)}{Q0(21, 3)}\right)^4 \cdot \left(\frac{Q0(29, 1)}{Q0(29, 3)}\right)^2 = 136.9568653$$

3.2 *Rekursionsformeln für die Q0 bzw. Q1 (Quadrierung -> Wallische Produktzerlegung von π)*

$$\frac{(n-1) \cdot Q0(n-2, 0)}{n \cdot Q0(n, 0)} = \frac{(n-3) \cdot (-Q2Z(n-2))}{n \cdot (-Q2Z(n))} = 1 \cdot n \geq 2, \text{ bei } -Q2Z \text{ zus. n ungleich } 3$$

--- Wallische Produktzerlegung von π auch ableitbar aus folg. Zusammenhang
bestimmtes trigonometrisches Integral ergibt Q0Z, vgl Mey1 173, fs GR s.416
bei Tabellen: n wird variiert, u ist ganzzahlig und ungleich 0

1:GERADE POTENZEN

$$\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} SIN(u\cdot x)^{2\cdot n}\,dx}{Q0(2\cdot n,\ 0)} = \frac{\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} SIN(u\cdot x)^{2\cdot n}\,dx}{Q0(2\cdot n,\ 0)} = \frac{\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} COS(u\cdot x)^{2\cdot n}\,dx}{Q0(2\cdot n,\ 0)} = \frac{INT(sincos)^{2\cdot n}\cdot usw}{Q0Z(2\cdot n)} = 1$$

$$\frac{Q0(2\cdot n,\ 0)}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2\cdot n + 1)\cdot Q0(2\cdot n,\ 0)}}\cdot\text{-> } 1+0 \text{ für } n\to\infty$$

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} (a\cdot SIN(u\cdot x))^{2\cdot n}\,dx = \left[\left[0,\ 1,\ 1,\ \frac{a^2}{2},\ 2,\ \frac{3\cdot a^4}{8},\ 3,\ \frac{5\cdot a^6}{16},\ 4,\ \frac{35\cdot a^8}{128}\right]\right]\cdot\text{=Taylor } 1/\sqrt{..}$$

$$\int \frac{1}{2\cdot\pi\cdot a^2}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} (a\cdot SIN(u\cdot x))^{2\cdot n}\,dx\,da = \int \left[\left[0,\ \frac{1}{a^2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3\cdot a^2}{8},\ 3,\ \frac{5\cdot a^4}{16},\ 4,\ \frac{35\cdot a^6}{128}\right]\right] da\cdot\text{=po*(2*n)}$$

$$\left[\left[0,\ -\frac{1}{a},\ a,\ \frac{a}{2},\ 2\cdot a,\ \frac{a^3}{8},\ 3\cdot a,\ \frac{a^5}{16},\ 4\cdot a,\ \frac{5\cdot a^7}{128}\right]\right]\cdot\text{=-Q2Z}$$

2:UNGERADE POTENZEN

$$\frac{\int_0^{\pi/2} SIN(x)^{2\cdot n + 1}\,dx}{\frac{1}{(2\cdot n + 1)\cdot Q0(2\cdot n,\ 0)}} = \frac{\int_0^{\pi/2} COS(x)^{2\cdot n + 1}\,dx}{\frac{1}{(2\cdot n + 1)\cdot Q0(2\cdot n,\ 0)}} = 1\cdot\text{(UNG POT ERGIBT 0 BEI 2PI)}$$

$$\int_0^{\pi/2} (a\cdot SIN(x))^{2\cdot n + 1}\,dx = \left[\left[0,\ a,\ 1,\ \frac{2\cdot a^3}{3},\ 2,\ \frac{8\cdot a^5}{15},\ 3,\ \frac{16\cdot a^7}{35},\ 4,\ \frac{128\cdot a^9}{315}\right]\right]$$

$$\frac{d}{da}\int_0^{\pi/2} (a\cdot SIN(x))^{2\cdot n + 1}\,dx = \left[\left[0,\ 1,\ 1,\ 2\cdot a^2,\ 2,\ \frac{8\cdot a^4}{3},\ 3,\ \frac{16\cdot a^6}{5},\ 4,\ \frac{128\cdot a^8}{35}\right]\right]\cdot\text{=1/Q0Z}$$

$$\frac{d}{db}\,\frac{d}{da}\left(\frac{1}{b^2}\cdot\int_0^{\pi/2} (a\cdot b\cdot SIN(x))^{2\cdot n + 1}\,dx\right) = \left[\left[0,\ -\frac{1}{b^2},\ 1,\ 2\cdot a^2,\ 2,\ 8\cdot a^4\cdot b^2,\ 3,\ 16\cdot a^6\cdot b^4,\ 4,\ \frac{128\cdot a^8\cdot b^6}{5}\right]\right]\cdot\text{=1/po}$$

((in Anlehnung von wtay2d_1)) 2d- Taylorentwicklung von:

$$f(x,\ y) := \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}$$

8. Taylorpolynom von $1/\sqrt{(1-x^2-y^2)}$ um (0,0), Vorzeichen (wg Wurzel unbestimmt) auf +:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}\cdot(x^4 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + y^4) + \frac{5}{16}\cdot(x^6 + 3\cdot x^4\cdot y^2 + 3\cdot y^4\cdot x^2 + y^6) + \frac{35}{128}\cdot(x^8 + 4\cdot x^6\cdot y^2 + 6\cdot x^4\cdot y^4 + 4\cdot x^2\cdot y^6 + y^8)$$

innerhalb der Klammern ergibt sich wiederum Binomialverteilung von Q0(n/2,k)

Σ in Klammern = 1 für x^2+y^2=1; Vorfaktor in Mitte: maximal für x^2=y^2=0.5

$$\frac{35}{128}\cdot\left(x^8 + 4\cdot x^6\cdot y^2 + 6\cdot x^4\cdot y^4 + 4\cdot x^2\cdot y^6 + y^8\right) = 0.2734375\cdot\left(x^8 + y^8\right) + 1.09375\cdot\left(x^6\cdot y^2 + x^2\cdot y^6\right) + 1.640625\cdot x^4\cdot y^4$$

3.3 ************* *Skalarprodukte der Q0P und Q0:*

nun (versetzte) horizontale Summe aller P-QUADRATE (=1 für n>=dr):
nun allg für versetzte Σ, m<n, m=n, m>n möglich, m ganzzahlig:

$$\sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} Q0P(m, -2\cdot k, p)\cdot Q0P(n, 2\cdot k + dr, p) = Q0P(m + n, dr, p)$$

*** bei p=1/2 (Symmetrie) ist das Minuszeichen vor 2k nicht mehr notwendig:

$$\sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} Q0(m, 2\cdot k)\cdot Q0(n, 2\cdot k + dr) = Q0(m + n, dr)$$

$$\sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} Q0M(m, 2\cdot k)\cdot Q0M(n, 2\cdot k + dr) = (-1)^m\cdot Q0M(m + n, dr)$$

rem zu oben: Q0(m,k)==0 für k = (m+2, m+4, m+6,...)
Sonderfall obiger Formel: Symmetrisch um 0, d.h. dr=0

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} Q0(n, 2\cdot k)^2}{Q0(2\cdot n, 0)} = \frac{hor\cdot\Sigma(aller)\cdot q0quadrate\cdot symm\cdot zu\cdot 0}{q0zentral\cdot in\cdot zeile\cdot 2\cdot n} = 1$$

3.3.1 **Skalarprodukt mit abwechselnem Vorzeichen über die Wegmöglichkeiten**

$$W0(n, k) := 2^n\cdot Q0(n, k)$$

ergibt Anzahl der Wege zum Zentrum

$$W0(2\cdot n, 0) = \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k\cdot W0(2\cdot n, 2\cdot k)^2$$

ausgedrückt durch die Q0 ergibt das

$$Q0Z(2\cdot n) = 2^{2\cdot n}\cdot\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k\cdot Q0(2\cdot n, 2\cdot k)^2$$

3.3.2 **horizontales Skalarprodukt Q1:**

m<=n; für Q1 ist ob (nur) für dr=0 gültig:

$$\sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} Q1(m, 2\cdot k)\cdot Q1(n, 2\cdot k) = Q1(m + n - 1, -1) = -Q2Z(m + n)$$

daraus folgt zB:

$$\sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} Q1(n, 2\cdot k)^2 = -Q2Z(2\cdot n) = \frac{Q0Z(2\cdot n)}{2\cdot n - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{2\cdot j - 1}\ \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} Q1(n, 2\cdot k)\cdot Q1(2\cdot j - n, 2\cdot k) = (2\cdot j - 1)\cdot(-Q2Z(2\cdot j)) = Q0Z(2\cdot j)$$

3.3.3 **vertikale Skalarprodukte in umgekehrter Reihenfolge:**

wegen Reihenentwicklung von 1/(1-x^2), = 1/√(1-x^2) * 1/√(1-x^2)
unter Nutzung von Cauchy-Polynom-Produktregel:

$$\sum_{k=0}^{n} Q0Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n - 2\cdot k) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} Q2Z(2\cdot j)\right)\cdot\sum_{j=0}^{n-k} Q2Z(2\cdot j) = 1$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} Q0Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k) = 1 - Q0Z(2\cdot n)$$

für 2n>=2 gilt

$$\sum_{k=0}^{n} Q2Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k) = \left(\sum_{k=1}^{n} Q2Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k)\right) + Q0Z(2\cdot n) = 0$$

für 2n>=4 gilt

$$\sum_{k=0}^{n} Q2Z(2\cdot k)\cdot Q2Z(2\cdot n-2\cdot k) = \left(\sum_{k=1}^{n} Q2Z(2\cdot k)\cdot Q2Z(2\cdot n-2\cdot k)\right) + Q2Z(2\cdot n) = 0$$

Interpretation: Schritte möglich in mehreren Dimensionen,
Dreieck nicht mehr platt; z.B. 2k von 2n Schritten entlang +-x
und 2n-2k Schritte entlang +-y,
hierbei 2n entlang weiterer Dimension, zB z oder t......
noch mehr Dimensionen als 2 (x und y): Zerlegung von n
nicht nur in n und n-k sondern in in eine direkte Summe
von mehreren Gliedern, bei 3 Giedern z.B. n-k1-k2, k1, k2

----

fraglichere alte Interpretation: evtl (?) Summe Q0Q0 als Norm;
Sum Q0Q1 Abl d/dn, Sum Q1Q1 d/dn^2 (weil je d/dn Faktor 1/n resultiert)
Summiert man ab 2n=2, so gilt für grosse n also in erster Näherung

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} -Q2Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k)}{\sum_{k=1}^{n} Q0Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k)}\cdot geht\cdot gegen\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\pi\cdot n}\right)}\cdot((\text{Zähler } d/dn))$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} -Q2Z(2\cdot k)\cdot(-Q2Z(2\cdot n-2\cdot k))}{\sum_{k=1}^{n} Q0Z(2\cdot k)\cdot Q0Z(2\cdot n-2\cdot k)}\cdot geht\cdot gegen\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4\cdot\pi\cdot n^{3}}\right)}\cdot((\text{Zähler } d/dn\text{^}2))$$

3.4 ***Summe aller k * Q0-Quadrate = Abweichung der Quadrierten Q0 für große n (n=2k+1:>, n=2k:<)***

(Zusammenhang r^2/(Abw einseitig_bzw_vergangenheit)=Kugeloberfläche?)
aus ob. Zusammenhang der Q1 (dr=0) folgt für die Q0:

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} (2\cdot k)^{2}\cdot Q0(m,2\cdot k)\cdot Q0(n,2\cdot k) = \frac{m\cdot n}{m+n-1}\cdot Q0(m+n-1,1)$$

$$\frac{2\cdot\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k)^{2}\cdot Q0(n,2\cdot k)^{2}}{n\cdot Q0(2\cdot n-2,0)} = \frac{2\cdot\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k)^{2}\cdot Q0(n,2\cdot k)^{2}}{\frac{n}{2\cdot n-2}\cdot\sum_{x=0}^{n-2} Q0(2\cdot x,0)} = \frac{2\cdot summe\cdot beids\cdot abwq0^{2}\cdot(zeile\cdot n)}{\frac{n}{2\cdot n-2}\cdot vert\cdot summe\_q0z\cdot bis\cdot 2\cdot n} = 1$$

$$\frac{\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k)^{2}\cdot Q0(n,2\cdot k)^{2}}{\frac{n}{2\cdot n-1}\cdot\sum_{k=0}^{n} 2\cdot k\cdot Q0(2\cdot n,2\cdot k)} = \frac{summe\cdot aller\cdot abw\_q0^{2}\cdot(zeile\cdot n)}{\frac{n}{2\cdot n-1}\cdot abw\_q0\cdot(zeile\cdot 2\cdot n)} = 1$$

Ergänzend: n * Q0(2n,0) ergibt folgender Ausdruck:

(Eigenwert=n, Bezug zu 2. Abl nach dk (Hamilton) anders wohl einfacher herstellbar

$$2\cdot\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k)^{2}\cdot Q0(n,2\cdot k)^{2} - 0.5\cdot\sum_{k=-(n+1)/2}^{(n-1)/2} Q0(n-1,2\cdot k)^{2} = n\cdot Q0(2\cdot n,0)$$

3.4.1

Skalarprodukt mit 4. Potenz von k; für

$$f(n) := \sum_{k=-n}^{n} (2\cdot k)^4 \cdot Q0(2\cdot n, 2\cdot k)^2$$

gilt

$$f(n) = \frac{2\cdot n^2\cdot(3\cdot n-2)}{2\cdot n-1}\cdot Q0Z(4\cdot n-4) = \frac{4\cdot n^2\cdot(3\cdot n-2)}{4\cdot n-3}\cdot Q0Z(4\cdot n-2) = \frac{16\cdot n^3\cdot(3\cdot n-2)}{(4\cdot n-1)\cdot(4\cdot n-3)}\cdot Q0Z(4\cdot n)$$

3.4.2 folg. gilt für große n, d.h. einseitige Abw -> 1/(2π):

$$\left(\sum_{k=-n/2}^{n/2} |2\cdot k|\cdot Q0(n, 2\cdot k)^2\right)\cdot\pi = \left(\sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{n^2\cdot Q1(n, 2\cdot k)^2}{|2\cdot k|}\right)\cdot\pi\cdot\text{->}1-0 \text{ (n=grad) bzw } 1+0 \text{ (n=ungr)}$$

Begründung ergibt sich aus analytischer Darstellung Q0E der Q0:

$$Q0E(n, k) := \frac{\sqrt{2}\cdot \hat{e}^{-k^2/(2\cdot n)}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}$$

obige Σ entspricht:

$$\int 2\cdot k\cdot Q0E(n, 2\cdot k)^2\, dk = -\frac{\hat{e}^{-4\cdot k^2/n}}{2\cdot\pi}$$

für große k (bei festem n) ergibt sich als Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} 2\cdot\int_0^x 2\cdot k\cdot Q0E(n, 2\cdot k)^2\, dk = \frac{1}{\pi}$$

Skalarprodukt, ein Glied d/dk (Ortsoperator, Q0Z (2 n)^2 geht gegen 1 / (π n)

$$\sum_{k=-n}^{0} Q0(2\cdot n, 2\cdot k)\cdot Q1(2\cdot n, 2\cdot k) = \frac{Q0Z(2\cdot n)^2}{4}\cdot\text{geht gegen } 1 / (4\ \pi\ n)$$

Quotient mit regulärem Skalarprodukt von Zeile 2n:

$$\frac{Q0Z(2\cdot n)^2}{4\cdot Q0Z(4\cdot n)}\cdot\text{geht}\cdot\text{gegen}\cdot\frac{Q0Z(2\cdot n)}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\text{bzw}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{8\cdot\pi\cdot n}\right)}$$

dto bei Differenzierung nach n (Zeitoperator)

$$\left(\sum_{k=-2\cdot n/2}^{0} Q0(2\cdot n, 2\cdot k)\cdot\frac{k^2-2\cdot n}{(2\cdot n)^2}\cdot Q0(2\cdot n, 2\cdot k)\right)\cdot\text{geht gegen:}$$

$$\text{geht}\cdot\text{für}\cdot\text{grosse}\cdot n\cdot\text{gegen} -\frac{1}{2}\cdot Q0Z(2\cdot n)^3\cdot\text{bzw} -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\pi\cdot n}\right)^3}$$

3.4.2.1 Quotient mit regulärem Skalarprodukt von Zeile 2n:

$$-\frac{\frac{1}{2}\cdot Q0Z(2\cdot n)^3}{Q0Z(4\cdot n)}\cdot\text{geht}\cdot\text{gegen} -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot Q0Z(2\cdot n)^2\cdot\text{bzw}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot n}\right)$$

3.4.2.2 nun analog d/dk (Ortsoperator) bei Q1(n,k); entspricht d/dk^2 Q0(n,k):

grobe analytische Betrachtung: Faktor -k/n je d/dk

$$\frac{\sum_{k=-n}^{0} Q1(2\cdot n,\ 2\cdot k)\cdot\frac{k^2}{(2\cdot n)^2}\cdot Q0(2\cdot n,\ 2\cdot k)}{\frac{1}{10\cdot\pi^2\cdot n^2}}\cdot ca\ 1$$

ergibt 0.9825 für n=333

$$hierbei\cdot geht\cdot\frac{1}{10\cdot\pi^2\cdot n^2}\cdot gegen\cdot\frac{Q0Z(2\cdot n)^4}{10}\cdot oder\cdot\frac{(2\cdot n\cdot Q2Z(2\cdot n))^4}{10}$$

3.4.2.3 Quotient mit regulärem Skalarprodukt von Zeile 2n:

$$\frac{\frac{(2\cdot n\cdot Q2Z(2\cdot n))^4}{10}}{-\ Q2Z(4\cdot n)}\cdot geht\cdot gegen\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 2\cdot n\cdot(2\cdot n\cdot(-\ Q2Z(2\cdot n)))^3}{5}\cdot bzw\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{\pi^3\cdot n}}$$

3.4.2.4 nun d/dn (Zeitoperator) bei Q1(n,k), Ber. von d/dk^2= 2d/dn

$$\frac{\sum_{k=-n}^{0} Q1(2\cdot n,\ 2\cdot k)\cdot\frac{k^3}{2\cdot(2\cdot n)^3}\cdot Q0(2\cdot n,\ 2\cdot k)}{\frac{-1}{24\cdot\pi^2\cdot n^2\cdot\sqrt{\pi\cdot n}}}\cdot ca\ 1$$

ergibt 0.9822 für n=333

$$hierbei\cdot geht\cdot\left(-\ \frac{1}{24\cdot\pi^2\cdot n^2\cdot\sqrt{\pi\cdot n}}\right)\cdot gegen\cdot\left(-\ \frac{Q0Z(2\cdot n)^5}{24}\right)\cdot bzw\cdot\frac{-\ (2\cdot n\cdot(-\ Q2Z(2\cdot n)))^5}{24}$$

Quotient mit regulärem Skalarprodukt von Zeile 2n:

$$\frac{\frac{-\ (2\cdot n\cdot(-\ Q2Z(2\cdot n)))^5}{24}}{-\ Q2Z(4\cdot n)}\cdot geht\cdot gegen\cdot\frac{-\ \sqrt{2}\cdot n\cdot(2\cdot n\cdot(-\ Q2Z(2\cdot n)))^4}{6}\cdot bzw\cdot\left(-\ \frac{\sqrt{2}}{6\cdot\pi^2\cdot n}\right)$$

Summasumarum: Quotienten bei d/dk proportional $1/\sqrt{n}$,
bei d/dn proportional 1/n (wie zu erwarten)
******
ALT: Rausflußwahrscheinlichkeit 0.5, vgl wpoloch:
Q105(n, k) := 2·Q1(n + 1, k + 1)
da bei Q1 mit Plire = 0.5 bei k=1 letztl. Rausflußwahrscheinlichkeit von 0.5 gilt
sonderfälle: k=−1 -> Q105 = 4PP/(n+3), k=−3-> 8PP/(n+5)...

3.5 nun potenzierte Randabweichungen bez Binomialentwicklung (1+x)^n am Beispiel x=3:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k\cdot COMB(n,\ k) = (1 + 3)^n = 4^n\cdot hieraus\ folgt:$$

$$\sum_{k=-\ n/2}^{n/2} 3^{k + n/2}\cdot Q0P(n,\ 2\cdot k,\ pr) = (1 + 2\cdot pr)^n\cdot{=}2^n\ für\ pr{=}0.5$$

Q0P 3er potenzen Abweichung vom Rand:

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} 3^{k+n/2}\cdot\left(k+\frac{n}{2}\right)\cdot Q0P(n,\ 2\cdot k,\ pr) = 3\cdot n\cdot pr\cdot(2\cdot pr+1)^{n-1}$$

3.6 *Taylorreihe von 1/(1-x)^(1/n), vgl auch ML 530*

$$\frac{1}{(1-x)^{1/n}} = 1 + \frac{1\cdot x}{1\cdot n} + \frac{1\cdot(1+1\cdot n)\cdot x^2}{1\cdot n\cdot 2\cdot n} + \frac{1\cdot(1+1\cdot n)\cdot(1+2\cdot n)\cdot x^3}{1\cdot n\cdot 2\cdot n\cdot 3\cdot n}\cdot........usw$$

grob Beweisschema Taylorentwicklung √(1-x^2) -> Q0-Dreieck:
am einfachsten per allgemeiner Bimomialentwicklung (Binomialtheorem)
oder (umständlicher) durch vollst. Induktion
Produktregel, Zähler*1/Nenner, dadurch 1/√ von Polynom getrennt;
je Ableitung nach Erweiterung mit (1-x^2):
1/Nenner_n+1 = 1/Nenner_n * 1/(1-x^2) (Erweiterung)
Zähler_n+1:=
=Ableitung_Zähler_n (Shift) * (1-x^2) +
+ Zähler * (-2x) * (0.5-n)
Ableitung shiftet auf Glied ohne x, welches om 0 nicht verschwindet ->
also Zähler 1*3*5, Nenner 2*4*6*8... (nach 1/n! (Taylor))
oder Bew. von 1/√(1-x^2) Reihe aus 1/√(1-x^2)^2 = 1/(1-x^2)=1+x^2+x^4...
mit Cauchy Produktregel:
(Σ (2k über k)/4^k)^2 = ΣΣ (2k ü k)(2n-2k ü n-k)/4^k = (1+1)^k (1+1)^k / 4^k = 1
= (Σ Hor)*(Σ Hor) (=1 bei Sum vor Mult bzw. keine Wahrnehmung zwischendurch)
(Σ (Hor*Hor) = Q0(n+m,... < 1, falls in Zeile n Wahrnehmung zwischendurch
letzteres wohl P(Wahrnehmung der betr. Information IN VORHERIGER ZEILE n
****
n/f iteriert, f(n+1)=n/f(n); f(2n+1)=1/Q0Z(2n)
also f(n) = (n-1)/f(n-1) :
EL(x, n) := ELEMENT(x, n)

$$NDIVF(n) := EL\left(ITERATE\left(\left[\frac{ELEMENT(x,\ 2)}{ELEMENT(x,\ 1)},\ ELEMENT(x,\ 2)+1\right],\ x,\ [1,\ 1],\ n-1\right),\ 1\right)$$

NDIVF(n + 1)·Q0Z(n)·=1 für n=2k, =2/π für n=2k+1

Taylor schräger Summen als s/(1-x/...)^r; hier Bsp r=3:

$$\frac{1}{4\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} Q0(n,\ n-4)\cdot x^{n-2} = \frac{1}{4} + \frac{3\cdot x}{8} + \frac{3\cdot x^2}{8} + \frac{5\cdot x^3}{16} + \frac{15\cdot x^4}{64}\cdot...$$

4 **WQM4.mth: ein paar tabellen; vorher WQMD.mth als utility laden**

LOAD(wqmd.mth)

4.1 *Nun vertikale Summen der zentralen Wahrscheinlichkeitsquadrate:*

$$f(n) := \sum_{x=1}^{n/2} Q0Z(2\cdot x)^2$$

$$\left[\left[0,\ 0,\ 2,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{25}{64},\ 6,\ \frac{125}{256},\ 8,\ \frac{9225}{16384}\right]\right]$$

0	0	10	0.6236114501	20	0.8223893427	30	0.9438788471	40	1.031607637
2	0.25	12	0.6745004653	22	0.850676578	32	0.9634648312	42	1.046585889
4	0.390625	14	0.7183792591	24	0.8766556535	34	0.9819156414	44	1.060891049
6	0.48828125	16	0.7569446051	26	0.9006747692	36	0.9993556434	46	1.074581006
8	0.5630493164	18	0.7913439415	28	0.9230088703	38	1.015889828	48	1.087706489

f (n) überschreitet √2 im Bereich von n=1/αs=137.036:
f (136)=1.4128822798; F (138)=1.4174787825; Interpolation:

$$f(136) + (f(138) - f(136))\cdot\frac{137.036-136}{138-136} = 1.000742254\cdot\sqrt{2}$$

$$136 + \frac{(138 - 136)\cdot(\sqrt{2} - 1.412882279)}{1.417478782 - 1.412882279} = 136.5792589$$

Summe aller Q0Z^2 vertikal aufsummiert prop ln(n):

$$f(n) := \frac{LN(n)}{\sum_{x=1}^{n/2} Q0Z(2\cdot x)^2}$$

F (50)=3.5553754572;   F (500)=3.4057028066

4.2 Summe aller Q2Z^2 vertikal aufsummiert

$$f(n) := \sum_{x=1}^{n/2} Q2Z(2\cdot x)^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & \frac{17}{64} & 8 & \frac{4441}{16384} & 12 & \frac{285449}{1048576} & 16 & \frac{292762601}{1073741824} \\ 2 & \frac{1}{4} & 6 & \frac{69}{256} & 10 & \frac{17813}{65536} & 14 & \frac{1142885}{4194304} & 18 & \frac{1171561629}{4294967296} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0.265625 & 8 & 0.2710571289 & 12 & 0.2722253799 & 16 & 0.2726564193 \\ 2 & 0.25 & 6 & 0.26953125 & 10 & 0.2718048095 & 14 & 0.2724850177 & 18 & 0.2727754481 \end{bmatrix}$$

f(100)=0.27322378828=3.6600034217, F (500) = 0.27323890938 = 1/3.6598008763 ·

nochmals einzelne Q0Z unquadriert:

f(n) := Q0Z(n)

[[136, 0.06829238484, 137, 0.06804359904, 138, 0.06779751249, 139, 0.06755407674]]

F (n) := 1 / Q0Z (n)

[[136, 14.64292105, 137, 14.69645953, 138, 14.74980369, 139, 14.80295561]]

allg Tab für k ganzzahlig:

f(n) := [Q0M(n, −4), Q0M(n, −3), Q0M(n, −2), Q0M(n, −1), Q0M(n, 0), Q0M(n, 1), Q0M(n, 2), Q0M(n, 3), Q0M(n, 4)]

$$\begin{bmatrix} 0 & \left[0, -\frac{2\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, 0, -\frac{2\cdot\hat{\imath}}{\pi}, 1, \frac{2\cdot\hat{\imath}}{\pi}, 0, \frac{2\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, 0\right] \\ 1 & \left[-\frac{2\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, 0, -\frac{2\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, \frac{1}{2}, \frac{2\cdot\hat{\imath}}{\pi}, -\frac{1}{2}, -\frac{2\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, 0, -\frac{2\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}\right] \\ 2 & \left[0, -\frac{4\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, \frac{1}{4}, \frac{4\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, -\frac{1}{2}, -\frac{4\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, \frac{1}{4}, \frac{4\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, 0\right] \\ 3 & \left[-\frac{4\cdot\hat{\imath}}{35\cdot\pi}, \frac{1}{8}, \frac{4\cdot\hat{\imath}}{5\cdot\pi}, -\frac{3}{8}, -\frac{4\cdot\hat{\imath}}{3\cdot\pi}, \frac{3}{8}, \frac{4\cdot\hat{\imath}}{5\cdot\pi}, -\frac{1}{8}, -\frac{4\cdot\hat{\imath}}{35\cdot\pi}\right] \\ 4 & \left[\frac{1}{16}, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{35\cdot\pi}, -\frac{1}{4}, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, \frac{3}{8}, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, -\frac{1}{4}, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{35\cdot\pi}, \frac{1}{16}\right] \end{bmatrix}$$

nun zwecks Platz einseitig:

f(n) := [Q0M(n, 0), Q0M(n, 1), Q0M(n, 2), Q0M(n, 3), Q0M(n, 4), Q0M(n, 5), Q0M(n, 6), Q0M(n, 7), Q0M(n, 8)]

$$\begin{bmatrix} 4 & \left[\frac{3}{8}, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, -\frac{1}{4}, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{35\cdot\pi}, \frac{1}{16}, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{315\cdot\pi}, 0, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{3465\cdot\pi}, 0\right] \\ 5 & \left[\frac{16\cdot\hat{\imath}}{15\cdot\pi}, -\frac{5}{16}, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{21\cdot\pi}, \frac{5}{32}, \frac{16\cdot\hat{\imath}}{63\cdot\pi}, -\frac{1}{32}, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{693\cdot\pi}, 0, -\frac{16\cdot\hat{\imath}}{9009\cdot\pi}\right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
6 & \left[-\frac{5}{16}, -\frac{32\cdot î}{35\cdot\pi}, \frac{15}{64}, \frac{32\cdot î}{63\cdot\pi}, -\frac{3}{32}, -\frac{32\cdot î}{231\cdot\pi}, \frac{1}{64}, \frac{32\cdot î}{3003\cdot\pi}, 0\right] \\
7 & \left[-\frac{32\cdot î}{35\cdot\pi}, \frac{35}{128}, \frac{32\cdot î}{45\cdot\pi}, -\frac{21}{128}, -\frac{32\cdot î}{99\cdot\pi}, \frac{7}{128}, \frac{32\cdot î}{429\cdot\pi}, -\frac{1}{128}, -\frac{32\cdot î}{6435\cdot\pi}\right] \\
8 & \left[\frac{35}{128}, \frac{256\cdot î}{315\cdot\pi}, -\frac{7}{32}, -\frac{256\cdot î}{495\cdot\pi}, \frac{7}{64}, \frac{256\cdot î}{1287\cdot\pi}, -\frac{1}{32}, -\frac{256\cdot î}{6435\cdot\pi}, \frac{1}{256}\right]
\end{array}$$

--- Einschub Neg zentrale Binomialkoeff; keine besondere Idee bekommen
b0zneg(n2):=Negative zentrale Binomialkoeffizienten je Doppelzeile
es resultiert k/n=1/3=1-2p, also p=1/3

$$B0ZNEG(n2) := \frac{Q0(2 + 3\cdot(n2 - 1), n2 - 1)\cdot(-1)^{n2}\cdot 8^{n2}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & ? & 2 & 10 & 4 & 330 & 6 & 12376 & 8 & 490314 \\ 1 & -2 & 3 & -56 & 5 & -2002 & 7 & -77520 & 9 & -3124550 \end{bmatrix}$$

QB0ZNEG (n2): moegliche zug. Wahrscheinlichkeit bei Teilung anstelle Mult mit 2

$$QB0ZNEG(n2) := Q0(2 + 3\cdot(n2 - 1), n2 - 1)\cdot(-1)^{n2}$$

$$\left[\left[1, -\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{16}, 3, -\frac{7}{32}, 4, \frac{165}{1024}, 5, -\frac{1001}{8192}\right]\right]$$

Sommerfeldkonstante αs: erwΣhnenswert:
1/αs=137.03599976, hiervon unterscheided sich
5!+4!-3!-2!+1!+3*3/(2*5*5*5)=137.036 etwa um die derzeitige Messgenauigkeit
sei u:=1.00005331220258 und F1 (x) := x - 2 x^2 - 6 x^3 + 24 x^4 + 120 x^5
dann gilt F1(u)=1/αs=137.0359895 und √(1 / (u - 1)) = 136.957773510415

Es ist 137.035948445538 = √(1 / (x - 1)) = x - 2 x^2 - 6 x^3 + 24 x^4 + 120 x^5
für x=1.00005325139387
die Umkehrfunktion von √(1/(u - 1)) ist

$$U1(x) := \frac{1}{x^2} + 1$$

$$F1\cdot U1(x) = \frac{137\cdot x^{10} + 675\cdot x^8 + 1324\cdot x^6 + 1290\cdot x^4 + 624\cdot x^2 + 120}{x^{10}}$$

ist wohl Zufall und nur eine von den vielen Spekulationen zur Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante.
Wuenschenwert wΣre ein direkter Bezug zu wichtigen physikalischen Gleichungen
z.B. zu einer diskreten Darstellung der Maxwell-Gleichungen

Nun noch spekulativer (evtl lõschen): Sommerfeldkonstante als Summe von Fakultätspolynomen:
Das_Verbliebene ist immer 1-Das_Abgeflossene); sei letzteres nun, zB a=1/sqrt(n)
1 - a·(1 - a·(1 - a·(1 - a·(1 - a))))
d.h. 1-a verbleibt; ist das Abgeflossene a Quelle für weiteren Abfluss a2, so verbleibt dort a(1-a2)
nehmen wir an, a2 fliesst wieder zurück, so verbleibt im Ursprungssystem statt 1-a nun 1-a+a*a2 = 1-a(1-a2)
wir nehmen nun an, a=a2=a3... und wiederholen das Ganze:

$$1 - a\cdot(1 - a\cdot(1 - a\cdot(1 - a\cdot(1 - a)))) = - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 = TAYLOR\left(\frac{1}{1 + a}, a, 5\right)$$

Willkηrliche Modifikation des Ausdrucks wegen Sommerfeldkonstante

$$f(x) := 1 - 2\cdot x\cdot(1 + 3\cdot x\cdot(1 - 4\cdot x\cdot(1 + 5\cdot x)))$$

$$f(x) := 120\cdot x^4 + 24\cdot x^3 - 6\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$$

$$f(1) = 137$$

$$f1(x) := 1 + 2\cdot x\cdot(1 - 3\cdot x\cdot(1 + 4\cdot x))$$

$f1(x) := -24\cdot x^3 - 6\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$

$-\dfrac{1}{f1(1)} = 0.037037037037037$

$f2(x) := 1 - 2\cdot x\cdot(1 + 3\cdot x)$

$f2(x) := -6\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$

$f2(1) = -7$

$f(1) - \dfrac{1}{f1(1)} + \dfrac{1}{f2(1)\cdot f(1)} = 137.03599428416$

ist zwar nahe dran, aber Rechnung wohl zu sehr in Richtung αS angepasst, ohne gute Begründung

5 wqm5.mth: vorher wqmd.mth als Utility laden

LOAD(wqmd.mth)

5.1 *Möglichkeit bei dezentralem Start: n_eigen < n_max*

zB n_eigen=n_max−1, daher folgende Rückrechnung:

$$Q0P(n - 1, n - 1 - 2\cdot k, p) = \frac{1}{p}\cdot\left(Q0P(n, n - 2\cdot k, p) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{p - 1}{p}\right)^j\cdot Q0P(n, n - 2\cdot k + 2\cdot j, p)\right)$$

wegen ((p − 1) / p)<0 wird über Glieder mit abwechselndem Vorzeichen summiert
setzen wir 2p−1=√(1−x^2) und a:=((p − 1) / p) so erhalten wir

$$a = \frac{p - 1}{p} = \frac{\dfrac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{2} - 1}{\dfrac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{\sqrt{1 - x^2} + 1} \le 0$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{a + 1}{1 - a}\cdot \text{und}\cdot x^2 = -\frac{4\cdot a}{(a - 1)^2}\cdot \text{bzw}\cdot\left(x = \pm\frac{2\cdot\sqrt{-a}}{1 - a}\right)$$

5.2 *aus drei Q0 Werten (minimales Dreieck) ist k und n errechenbar:*

$$\frac{Q0(n, k)}{Q0(n + 1, k - 1)} = -\frac{k - n - 2}{n + 1}\cdot{:=}a$$

$$\frac{Q0(n, k)}{Q0(n + 1, k + 1)} = \frac{k + n + 2}{n + 1}\cdot{:=}b$$

hieraus alles Weitere errechenbar:

$$\left[n = -\frac{a + b - 4}{a + b - 2},\ k = \frac{2\cdot(b - 1)}{a + b - 2} - 1,\ \frac{k}{n} = \frac{a - b}{a + b - 4}\right]$$

$$Q0(n + 2, k) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\cdot\frac{Q0(n, k)}{2} = \frac{Q0(n + 1, k - 1) + Q0(n + 1, k + 1)}{2}$$

Rückrechnung einfach und zweifach:

$$\frac{Q0(n - 1, k - 1)}{Q0(n, k)} = \frac{k}{n} + 1 = \frac{2\cdot(a - 2)}{a + b - 4}$$

$$\frac{Q0(n - 2, k)}{Q0(n, k)} = \frac{2\cdot(b - 2)\cdot(a - 2)}{(a + b - 3)\cdot(a + b - 4)}$$

Wegen p=0.5 ist Fall k=0 naheliegend und einfacher; aus k=0 folgt:

$$\frac{Q0(n, 0)}{Q0(n + 1, -1)} = a = \frac{n + 2}{n + 1} = b = \frac{Q0(n, 0)}{Q0(n + 1, 1)}$$

$$Q0(n+2,0) = \frac{1}{a}\cdot Q0(n,0) = \frac{n+1}{n+2}\cdot Q0(n,0)$$

$$Q0(n+2,0) = Q0(n+1,-1)$$

Rückrechnung einfach und zweifach im Fall k=0:

$$Q0(n-1,-1) = Q0(n,0)\cdot(\text{klar})$$

$$\frac{Q0(n-2,0)}{Q0(n,0)} = \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{1}{2\cdot(3-2\cdot a)} + \frac{1}{2} = \frac{a-2}{2\cdot a-3}$$

Einsetzen von a ergibt:

$$\frac{Q0(n-2,0)}{Q0(n,0)} = \frac{2\cdot Q0(n+1,-1) - Q0(n,0)}{3\cdot Q0(n+1,-1) - 2\cdot Q0(n,0)} = \frac{Q0(n,0)}{3\cdot(3\cdot Q0(n+1,-1) - 2\cdot Q0(n,0))} + \frac{2}{3}$$

Ende von: aus drei Q0 Werten (minimales Dreieck) ist ... errechenbar:

6 wqm6.mth

ein paar Definitionen aus wqmd:

$$Q0P(n,k,p) := (1-p)^{(n-k)/2}\cdot p^{(n+k)/2}\cdot \mathrm{COMB}\left(n, \frac{n+k}{2}\right)$$

$$Q0(n,k) := Q0P(n,k,0.5)$$

Q0 analytische Darstellung

$$Q0E(n,k) := \frac{\sqrt{2}\cdot \hat{e}^{-k^2/(2\cdot n)}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}}$$

----

nun Allgemeinfall pl ungleich pr, insbesondere pl=i sin, pr=cos

$$Q0SC(n,k,s,c) := s^{(n-k)/2}\cdot c^{(n+k)/2}\cdot \mathrm{COMB}\left(n, \frac{n+k}{2}\right)$$

damit ist

$$Q0P(n,k,p) = Q0SC(n,k,1-p,p)$$

es ist

$$\sum_{k=-n}^{n} Q0SC(2\cdot n, 2\cdot k, \hat{\imath}\cdot SIN(w), COS(w)) = COS(2\cdot n\cdot w) + \hat{\imath}\cdot SIN(2\cdot n\cdot w) = \hat{e}^{\hat{\imath}\cdot 2\cdot n\cdot w}$$

$$\sum_{k=-n}^{n+1} Q0SC(2\cdot n+1, 2\cdot k-1, \hat{\imath}\cdot SIN(w), COS(w)) = COS((2\cdot n+1)\cdot w) + \hat{\imath}\cdot SIN((2\cdot n+1)\cdot w) = \hat{e}^{\hat{\imath}\cdot(2\cdot n+1)\cdot w}$$

Dies einfach deshalb, weil Zeile n die Binomialentwicklung des rechten Ausdrucks von

$$(COS(w) + \hat{\imath}\cdot SIN(w))^{n} = COS(n\cdot w) + \hat{\imath}\cdot SIN(n\cdot w) = \hat{e}^{\hat{\imath}\cdot n\cdot w}$$

ist

ist also w ein (nicht exakt existierender, gedachter) Winkel, s:=i sin (w) und c=cos (w), so ist die horizontale Summe über Zeile n eine komplexe Zahl mit Phasenwinkel nw, d.h. der Drehwinkel ist proportional n
Der Realteil dieser Zahl lässt sich z.B. als E-Feldkomponente und der Imaginärteil als B-Feldkomponente eines elektromagnetischen Feldes auffassen...
durch Addition bzw. Subtraktion von Zeile n eines korrespondierenden (gespiegelten) Dreiecks mit Winkel -w (also Vorzeichentausch von s) erhält man den doppelten Real- bzw. Imaginärteil, d.h.
so ist wieder Trennung der Komponenten möglich;
so erhält man z.B die Funktionen sin(nw), cos(nw)
hierbei Abstufung je feiner, je kleiner ÛwÛ

6.1 *Darstellung von Q0SC durch Q0:*

$$\frac{Q0SC(n,k,s,c)}{Q0(n,k)} = 2^{n}\cdot c^{(k+n)/2}\cdot s^{(n-k)/2} = (4\cdot s\cdot c)^{n/2}\cdot\left(\frac{c}{s}\right)^{k/2}$$

also

$$Q0SC(n, k, s, c) = (4\cdot s\cdot c)^{n/2}\cdot\left(\frac{c}{s}\right)^{k/2}\cdot Q0(n, k)$$

analytisch:

$$Q0SCE(n, k, s, c) := (4\cdot s\cdot c)^{n/2}\cdot\left(\frac{c}{s}\right)^{k/2}\cdot Q0E(n, k)$$

$$\frac{d}{dk} Q0SCE(n, k, s, c) = \left(\frac{LN\left(\frac{c}{s}\right)}{2} - \frac{k}{n}\right)\cdot Q0SCE(n, k, s, c)$$

$$\frac{d}{dn} Q0SCE(n, k, s, c) = \left(LN(2) + \frac{LN(s\cdot c)}{2} + \frac{k^2 - n}{2\cdot n^2}\right)\cdot Q0SCE(n, k, s, c)$$

$$\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0SCE(n, k, s, c) = \left(\frac{LN\left(\frac{c}{s}\right)^2}{4} - \frac{k\cdot LN\left(\frac{c}{s}\right)}{n} + \frac{k^2 - n}{n^2}\right)\cdot Q0SCE(n, k, s, c)$$

hierbei LN (c/s)^2 = (LN (c/s))^2; nun Grenzwertbetrachtungen:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0SCE(n, k, s, c)}{2\cdot\frac{d}{dn} Q0SCE(n, k, s, c)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0SCE(n, k, s, c)}{2\cdot\frac{d}{dn} Q0SCE(n, k, s, c)} = \frac{LN\left(\frac{c}{s}\right)^2}{4\cdot LN(4\cdot s\cdot c)}$$

nun limes n->inf mit k=a*n, d.h. mit k proportional n; für

$$FTMP(n, k) := \frac{\left(\frac{d}{dk}\right)^2 Q0SCE(n, k, s, c)}{2\cdot\frac{d}{dn} Q0SCE(n, k, s, c)}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} FTMP(n, a\cdot n) = \frac{LN\left(\frac{c}{s}\right)^2 - 4\cdot a\cdot LN\left(\frac{c}{s}\right) + 4\cdot a^2}{4\cdot(LN(4\cdot s\cdot c) + a^2)}$$

def. hyperbolische Funktionen; es ist

$$SINH(w) = \frac{ê^{w}}{2} - \frac{ê^{-w}}{2}$$

$$COSH(w) = \frac{ê^{w}}{2} + \frac{ê^{-w}}{2}$$

6.2 <u>diskrete Darstellung der Exponentialfunktion:</u>

$$\sum_{k=-n}^{n} Q0SC(2\cdot n, 2\cdot k, SINH(w), COSH(w)) = COSH(2\cdot n\cdot w) + SINH(2\cdot n\cdot w) = ê^{2\cdot n\cdot w}$$

$$\sum_{k=-n}^{n+1} \text{Q0SC}(2 \cdot n + 1,\ 2 \cdot k - 1,\ \text{SINH}(w),\ \text{COSH}(w)) = \text{COSH}((2 \cdot n + 1) \cdot w) + \text{SINH}((2 \cdot n + 1) \cdot w) = \hat{e}^{(2 \cdot n + 1) \cdot w}$$

Die hyperbolischen Funktionen eignen sich auch
zur Darstellung der Lorentztrafo (vgl. auch Misner 66)

6.3 Pythagorean triple

Seien x,y positiv und x^2+y^2=1 exakt gefordert und der Qotient x/y=q möglichst gut zu approximieren
Wir wählen rationale Zahlen u,v, so dass möglichst (beliebig gut) v/u=q±√(q^2+1) erfüllt ist
und setzen dann x:=(v^2-u^2)/(v^2+u^2) und y:=2uv/(v^2+u^2) und es gilt apporimativ x/y=q
die Variable u ist frei und lässt sich z.B. durch 1 ersetzen

u :=

$$v := u \cdot (q - \sqrt{q^2 + 1})$$

$$x := \left| \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} \right|$$

$$y := \left| \frac{2 \cdot u \cdot v}{v^2 + u^2} \right|$$

$$\frac{x}{y} = q$$

$$v := u \cdot (q + \sqrt{q^2 + 1})$$

$$\frac{x}{y} = q$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Beispiel: q=10, also q + √(q^2 + 1) = √101 + 10 = 20.049875621120 ca. 20=u/v
sei u:=1, v:=20 -> x=399/401=0.99501246882793 und y=40/401=0.099750623441396
Beispiel: q:=√3, also q+√(q^2+1)=√3+2=3.7320508... ca. 3.732=933/250=u/v
dann ist x=807989/932989, y=466500/932989, x^2 + y^2=1, x/(√3·y)=0.99998428...
dies nun bequemer in funktionaler Form

$$\text{u\_durch\_v}(q) := q + \sqrt{q^2 + 1}$$

$$\text{fxy}(u, v) := \left[\left| \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} \right|, \left| \frac{2 \cdot u \cdot v}{v^2 + u^2} \right| \right]$$

$$\text{fxy}(933, 250) = \left[\frac{807989}{932989}, \frac{466500}{932989} \right]$$

dto mit weniger stellen
u_durch_v(√3)=3.7320508075688 = 0.999656... * 56/15

$$\text{fxy}(56, 15) = \left[\frac{2911}{3361}, \frac{1680}{3361} \right]$$

2911/1680=√3*1.0003968057208

7 wqm7.mth

LOAD(wtab.mth)

7.1 u.a. Hermite Polynome diskreter Ansatz

Binomialkoeffizient Anwendung, damit für negative n definiert:

$$\text{Q0P}(n, k, p) := (1 - p)^{(n - k)/2} \cdot p^{(n + k)/2} \cdot \text{COMB}\left(n, \frac{n + k}{2}\right)$$

$$\text{Q0P}(n, k, p) = \frac{(1 - p)^{(n - k)/2} \cdot p^{(n + k)/2} \cdot n!}{\left(\frac{n - k}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n + k}{2}\right)!}$$

$Q0(n, k) := Q0P(n, k, 0.5)$

7.2 daraus Wegmöglichkeiten:

$W0(n, k) := 2^n \cdot Q0(n, k)$

$$W0(n, k) = \frac{n!}{\left(\frac{k}{2} + \frac{n}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{k}{2}\right)!}$$

seien d1, d2 in N0

7.3 WD(d,n,k) = diskrete Differenz d ten Grades; n>=d notw.

```
WD(d, n, k) :=
  If d = 0
     W0(n, k)
     WD(d − 1, n − 1, k + 1) − WD(d − 1, n − 1, k − 1)
```

7.4 WS=Wegmöglichkeiten Hermite-Skalarprodukt (orthogonal); Nenner = Gewichtungsfunktion

$$WS(d1, d2, n) := \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{WD(0, n, 2 \cdot k)} \cdot WD(d1, n, 2 \cdot k) \cdot WD(d2, n, 2 \cdot k)$$

ist 0 für d1 ungleich d2 (ungleichen Ableitungsgrad) -> diskrete Orthogonalität

7.5 nun dto, allgemeiner anstelle Wegmöglichkeiten Wahrscheinlichkeiten

QDP(d,n,k,p) = diskrete WahrscheinlichkeitsDifferenz d ten Grades; n>=d notw.

```
QDP(d, n, k, p) :=
  If d = 0
     Q0P(n, k, p)
     (QDP(d − 1, n − 1, k + 1, p) − QDP(d − 1, n − 1, k − 1, p))/2
```

insbes. gilt $Q0P(n, 2 \cdot k, p)=QDP(0, n, 2 \cdot k, p)$

7.6 QSP=gewichtetes Skalarprodukt ueber QDP, Hermite Polynome

$$QSP(d1, d2, n, p) := \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{Q0P(n, 2 \cdot k, p)} \cdot QDP(d1, n, 2 \cdot k, p) \cdot QDP(d2, n, 2 \cdot k, p)$$

für d1, d2 in N0 gilt
$QSP(d1, d2, n, p) = 0$
für d1 ungleich d2, ansonsten für d1=d2=d

$$QSP(d, d, n, p) = \frac{1}{W0(n, n - 2 \cdot d) \cdot (4 \cdot p \cdot (1 - p))^d}$$

$$QSP(d, d, n, p) = \frac{1}{Q0(n, n - 2 \cdot d) \cdot 2^n \cdot (4 \cdot p \cdot (1 - p))^d} = \frac{1}{Q0P(n, n - 2 \cdot d, p) \cdot p^{2 \cdot d - n} \cdot 4^d}$$

d.h. die QDP (d, n, 2k ...) verhalten sich bezüglich der Gewichtungsfunktion $1/QDP(0, n, 2 \cdot k, p)$
analog·wie·die·Hermitepolynome·Hd(k)·(d·ten·Grades)
Wegen

$$\sum_{d=0}^{n} W0(n, n - 2 \cdot d) \cdot (4 \cdot p \cdot (1 - p))^d = (1 + 4 \cdot p \cdot (1 - p))^n$$

folgt

$$\sum_{d=0}^{n} \frac{1}{QSP(d, d, n, p)} = (1 + 4 \cdot p \cdot (1 - p))^n$$

man kann 4p(1-p) als x^2 bzw. (v/c)^2 interpretieren; es ist auch

$$1 + 4 \cdot p \cdot (1 - p) = - 4 \cdot p^2 + 4 \cdot p + 1 = (1 + 2 \cdot p) \cdot (1 - 2 \cdot p) + 4 \cdot p$$

Im Fall p=1/2, also $(4 \cdot p \cdot (1 - p))=1$ vereinfacht sich das Skalarprodukt zu

$$QSP\left(d, d, n, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{W0(n, n-2\cdot d)} = \frac{1}{Q0(n, n-2\cdot d)\cdot 2^{n}}$$

7.7 *für Q1 (Ersatzfunktion für Rausflußdreieck)*

$$Q1(n, k) := Q0(n, k)\cdot\left(-\frac{k}{n}\right)$$

gilt

$$Q1(n, k) = QDP\left(1, n, k, \frac{1}{2}\right)$$

7.8 *Einfache Diff. nach n proportional zweifacher Diff. nach k :*

$$4\cdot(Q0(n+2, k) - Q0(n, k)) = Q0(n, k-2) - 2\cdot Q0(n, k) + Q0(n, k+2) = 4\cdot QDP\left(2, n+2, k, \frac{1}{2}\right)$$

$$4\cdot(Q1(n+2, k) - Q1(n, k)) = Q1(n, k-2) - 2\cdot Q1(n, k) + Q1(n, k+2) = 4\cdot QDP\left(3, n+2, k, \frac{1}{2}\right)$$

Sonderfall Ableitungsgrad=Zeilenzahl, d.h. d=n: für |k|<=n=d gilt:

$$QDP\left(2\cdot n, 2\cdot n, 2\cdot k, \frac{1}{2}\right) = (-1)^{k+n}\cdot Q0(2\cdot n, 2\cdot k)$$

$$QDP\left(2\cdot n+1, 2\cdot n+1, 2\cdot k+1, \frac{1}{2}\right) = (-1)^{k+n+1}\cdot Q0(2\cdot n+1, 2\cdot k+1)$$

allgemeiner für versch. Wahrscheinlichkeiten (wobei |k|<=n=d)

$$2^{2\cdot n}\cdot p^{n+k}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot QDP(2\cdot n, 2\cdot n, 2\cdot k, p) = (-1)^{k+n}\cdot Q0P(2\cdot n, 2\cdot k, p)$$

$$2^{2\cdot n+1}\cdot p^{n+k+1}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot QDP(2\cdot n+1, 2\cdot n+1, 2\cdot k+1, p) = (-1)^{k+n+1}\cdot Q0P(2\cdot n+1, 2\cdot k+1, p)$$

Sonderfall |k|<=n=2d: Zoom mit Nullen dazwischen:

$$2^{2\cdot n}\cdot QDP\left(2\cdot n, 4\cdot n, 4\cdot k, \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+k}\cdot Q0(2\cdot n, 2\cdot k)$$

$$2^{2\cdot n+1}\cdot QDP\left(2\cdot n+1, 2\cdot(2\cdot n+1), 4\cdot k+2, \frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+k+1}\cdot Q0(2\cdot n+1, 2\cdot k+1)$$

Nullen dazwischen (Zoom) (gilt auch für ÛkÛ>n)

$$QDP\left(2\cdot n, 4\cdot n, 4\cdot k+2, \frac{1}{2}\right) = QDP\left(2\cdot n+1, 2\cdot(2\cdot n+1), 4\cdot k, \frac{1}{2}\right) = 0$$

7.9 *nun für p=1/2 Verhältnis der diskreten Ableitungen d ten Grades zu Q0*

$$f(d) := \frac{QDP\left(d, n, k, \frac{1}{2}\right)}{\frac{(-1)^{d}\cdot(n-d)!}{n!}\cdot Q0(n, k)} \cdot=\cdot \frac{WD(d, n, k)}{\frac{(-1)^{d}\cdot(n-d)!}{n!}\cdot W0(n, k)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & k^{3} - 3\cdot k\cdot n + 2\cdot k \\ 1 & k & 4 & k^{4} - 6\cdot k^{2}\cdot n + 8\cdot k^{2} + 3\cdot n^{2} - 6\cdot n \\ 2 & k^{2} - n & 5 & k^{5} - 10\cdot k^{3}\cdot n + 20\cdot k^{3} + 15\cdot k\cdot n^{2} - 50\cdot k\cdot n + 24\cdot k \end{bmatrix}$$

vgl. hierzu im Fall n=1/2 die Vorfaktoren HERMP(d,k)/(2^d)

für die Ableitungen der Q0E(n,k) (in WQM1)

7.10 Hermite polynome sind 'Teile' folgender Funktion:

$$F1(d, n, k) := \frac{QDP\left(d, n, k, \frac{1}{2}\right)}{\dfrac{Q0(n, k)}{\prod_{j=n-d+1}^{n} -j}}$$

$f(d) := F1(d, 2\cdot n, 2\cdot k)$

TAB2(0,2,1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8\cdot k^3 - 12\cdot k\cdot n + 4\cdot k \\ 1 & 2\cdot k & 4 & 16\cdot k^4 - 48\cdot k^2\cdot n + 32\cdot k^2 + 12\cdot n^2 - 12\cdot n \\ 2 & 4\cdot k^2 - 2\cdot n & 5 & 32\cdot k^5 - 160\cdot k^3\cdot n + 160\cdot k^3 + 120\cdot k\cdot n^2 - 200\cdot k\cdot n + 48\cdot k \end{bmatrix}$$

----
ohne impliziten Vorfaktor siehts so aus:

$$f(d) := \frac{QDP\left(d, n, k, \frac{1}{2}\right)}{Q0(n, k)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & \dfrac{k\cdot(k^2 - 3\cdot n + 2)}{n\cdot(1 - n)\cdot(n - 2)} \\ 1 & -\dfrac{k}{n} & 4 & \dfrac{k^4 + 2\cdot k^2\cdot(4 - 3\cdot n) + 3\cdot n\cdot(n - 2)}{n\cdot(n - 1)\cdot(n - 2)\cdot(n - 3)} \\ 2 & \dfrac{k^2 - n}{n\cdot(n - 1)} & 5 & \dfrac{k\cdot(k^4 + 10\cdot k^2\cdot(2 - n) + 15\cdot n^2 - 50\cdot n + 24)}{n\cdot(1 - n)\cdot(n - 2)\cdot(n - 3)\cdot(n - 4)} \end{bmatrix}$$

Spezialfall k=0:

$$f(d) := \frac{QDP\left(d, n, 0, \frac{1}{2}\right)}{Q0(n, 0)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & \dfrac{15}{(1 - n)\cdot(n - 3)\cdot(n - 5)} \\ 2 & \dfrac{1}{1 - n} & 8 & \dfrac{105}{(n - 1)\cdot(n - 3)\cdot(n - 5)\cdot(n - 7)} \\ 4 & \dfrac{3}{(n - 1)\cdot(n - 3)} & 10 & \dfrac{945}{(1 - n)\cdot(n - 3)\cdot(n - 5)\cdot(n - 7)\cdot(n - 9)} \end{bmatrix}$$

7.11 Verallgemeinerte Taylorreihenbetrachtungen

------- die diskreten Differenzen QDP ergeben (in k=0) folgende Taylorreihenkoeffizienten

$TAYLOR((1 - x^2)^{(d - 1)/2}, x, 0, 6)$

$$\frac{x^6\cdot(1-d)\cdot(d-3)\cdot(d-5)}{48}+\frac{x^4\cdot(d-1)\cdot(d-3)}{8}+\frac{x^2\cdot(1-d)}{2}+1$$

$FT(d) := TAYLOR((1-x^2)^{(d-1)/2}, x, 0, 14)$

FT(n) = (1 - x^2)^((n - 1)/2) für n= ungerade (Taylorreihe bricht ab)

FT(1)=1, FT(3)=1 - x^2, FT(5)=(1 - x^2)^2, FT(7)=(1 - x^2)^3 ...

für gerades n:
ft(0) ist Taylorreihe von 1/√(1-x^2).... Q0Z(2n)

$$FT(0)=\frac{429\cdot x^{14}}{2048}+\frac{231\cdot x^{12}}{1024}+\frac{63\cdot x^{10}}{256}+\frac{35\cdot x^8}{128}+\frac{5\cdot x^6}{16}+\frac{3\cdot x^4}{8}+\frac{x^2}{2}+1$$

ft(2) ist Taylorreihe von √(1-x^2).... -Q2Z(2n)

$$FT(2)=-\frac{33\cdot x^{14}}{2048}-\frac{21\cdot x^{12}}{1024}-\frac{7\cdot x^{10}}{256}-\frac{5\cdot x^8}{128}-\frac{x^6}{16}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{2}+1$$

ft(4) ist Taylorreihe von √(1-x^2)^3

$$FT(4)=\frac{9\cdot x^{14}}{2048}+\frac{7\cdot x^{12}}{1024}+\frac{3\cdot x^{10}}{256}+\frac{3\cdot x^8}{128}+\frac{x^6}{16}+\frac{3\cdot x^4}{8}-\frac{3\cdot x^2}{2}+1$$

ft(6) ist Taylorreihe von √(1-x^2)^5

$$FT(6)=-\frac{5\cdot x^{14}}{2048}-\frac{5\cdot x^{12}}{1024}-\frac{3\cdot x^{10}}{256}-\frac{5\cdot x^8}{128}-\frac{5\cdot x^6}{16}+\frac{15\cdot x^4}{8}-\frac{5\cdot x^2}{2}+1$$

ft(8) ist Taylorreihe von √(1-x^2)^7

$$FT(8)=\frac{5\cdot x^{14}}{2048}+\frac{7\cdot x^{12}}{1024}+\frac{7\cdot x^{10}}{256}+\frac{35\cdot x^8}{128}-\frac{35\cdot x^6}{16}+\frac{35\cdot x^4}{8}-\frac{7\cdot x^2}{2}+1$$

7.11.1 Nun Darstellung der Taylorreihen durch die QDP:

$$FF(d, n) := QDP\left(d, n, 0, \frac{1}{2}\right)$$

derive kapierts so besser:

$$FF(d, n) := Q0(n, 0)\cdot\frac{QDP\left(d, n, 0, \frac{1}{2}\right)}{Q0(n, 0)}$$

f(d) := FF(d, n)

$$\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{n!}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} & 6 & \dfrac{15\cdot n!}{2^n\cdot(1-n)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} \\ 2 & \dfrac{n!}{2^n\cdot(1-n)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} & 8 & \dfrac{105\cdot n!}{2^n\cdot(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot(n-7)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} \\ 4 & \dfrac{3\cdot n!}{2^n\cdot(n-1)\cdot(n-3)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} & 10 & \dfrac{945\cdot n!}{2^n\cdot(1-n)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot(n-7)\cdot(n-9)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!^2} \end{bmatrix}$$

f(d)=0 für ungerades d (wegen k=0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FT1(d) := \sum_{n=0}^{7} FF(d, 2\cdot n)\cdot x^{2\cdot n}$$

$$FT1(0) = \frac{429\cdot x^{14}}{2048} + \frac{231\cdot x^{12}}{1024} + \frac{63\cdot x^{10}}{256} + \frac{35\cdot x^{8}}{128} + \frac{5\cdot x^{6}}{16} + \frac{3\cdot x^{4}}{8} + \frac{x^{2}}{2} + 1$$

FT1(0) = FT(0)·das war die Reihe von Q0Z(2n)

$$FT1(2) = \sum_{n=0}^{7} FF(2, 2\cdot n)\cdot x^{2\cdot n}$$

damit Derive das Kürzen kapiert, ist vor Summation Simplify notw.

$$FT1(2) = \sum_{n=0}^{7} \frac{(2\cdot n)!}{(1 - 2\cdot n)\cdot (2^{n})^{2}\cdot n!^{2}}\cdot x^{2\cdot n}$$

$$FT1(2) = - \frac{33\cdot x^{14}}{2048} - \frac{21\cdot x^{12}}{1024} - \frac{7\cdot x^{10}}{256} - \frac{5\cdot x^{8}}{128} - \frac{x^{6}}{16} - \frac{x^{4}}{8} - \frac{x^{2}}{2} + 1$$

FT1(2) = FT(2)·das war die Reihe von -Q2Z(2n)
allgemein erhält man für d geradzahlig: FT1(d)=FT(d),
also die oben definierten Taylorreihen von (1 - x^2)^((d - 1)/2)
(für ungerades d ist FT1(d)=0)

7.11.2 nun noch ergänzend Taylorreihen der ersten Kehrwerte:

$$FT(-1) = x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^{8} + x^{6} + x^{4} + x^{2} + 1$$

$$FT(-2) = \sum_{n=0}^{7} (2\cdot n + 1)\cdot Q0(2\cdot n, 0)\cdot x^{2\cdot n}$$

$$FT(-2) = \frac{6435\cdot x^{14}}{2048} + \frac{3003\cdot x^{12}}{1024} + \frac{693\cdot x^{10}}{256} + \frac{315\cdot x^{8}}{128} + \frac{35\cdot x^{6}}{16} + \frac{15\cdot x^{4}}{8} + \frac{3\cdot x^{2}}{2} + 1$$

$$FT(-3) = 8\cdot x^{14} + 7\cdot x^{12} + 6\cdot x^{10} + 5\cdot x^{8} + 4\cdot x^{6} + 3\cdot x^{4} + 2\cdot x^{2} + 1$$

*7.12 ******* Diskrete Ableitungen nach k und n bei variablem p*

erste Ableitung nach dk:

$$Q1P(n, k, p) := \frac{Q0P(n - 1, k + 1, p) - Q0P(n - 1, k - 1, p)}{2}$$

7.12.1 *** Skalarprodukte:

1. Ableitung: Skalarprodukt nur auf einer Seite abgeleitet:

$$\sum_{k=- m/2}^{m/2} Q0P(m, - 2\cdot k, p)\cdot Q1P(n, 2\cdot k + dr, p) = Q1P(m + n, dr, p)$$

2. Ableitung: Skalarprodukt auf beiden Seiten abgeleitet:
Q1P(m + n, dr + 1, p) - Q1P(m + n, dr - 1, p) = 2·QDP(2, m + n + 1, dr, p)

$$\sum_{k=- m/2 - 1}^{m/2 + 1} Q1P(m, - 2\cdot k, p)\cdot Q1P(n, 2\cdot k + dr, p) = QDP(2, m + n, dr, p)$$

$$\sum_{k=- m/2 - 1}^{m/2 + 1} QDP(1, m, - 2\cdot k, p)\cdot QDP(1, n, 2\cdot k + dr, p) = QDP(2, m + n, dr, p)$$

allg: die Summe der Ableitungen der beiden Seiten entspricht dem Grad der Ableitung des Skalarproduktes

7.12.2 *** nun genauere Betrachtung der 1. Ableitung d/dk

Allgemeinfall mit variablem p zu wqm2: $\Sigma((-2\cdot k - n)\cdot Q1(n, 2\cdot k), k, -n/2, n/2) = 1$
Q1P(n, k, p) = QDP(1, n, k, p)
--- im Maximum entlang k>0, also p>1/2 und k/n = 2p−1 = sqrt(1−x^2)

gilt p=(1+k/n)/2 und es ist dort die diskrete Ableitung 0:

$$Q1P\left(n,\ k,\ \frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right) = QDP\left(1,\ n,\ k,\ \frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right) = 0$$

--- Verhaeltnis zu Q0P

$$QK(d, n, k, p) := \frac{QDP(d, n, k, p)}{Q0P(n, k, p)}$$

$$QK(0, n, k, p) = 1$$

7.12.3 ----- Verhaeltnis zu Q1P zu Q0P

$$QK(1, n, k, p) = \frac{k + n\cdot(1 - 2\cdot p)}{4\cdot n\cdot p\cdot(p - 1)}$$

aus x^2=4p(1−p) folgt p=(1 ±√(1 − x^2))/2, eingesetzt:

$$QK\left(1,\ n,\ k,\ \frac{\pm\sqrt{(1 - x^2)} + 1}{2}\right) = \frac{\pm\, n\cdot\sqrt{(1 - x^2)} - k}{n\cdot x^2}$$

noch 2. Ableitung nach k:

$$QK\left(2,\ n,\ k,\ \frac{\sqrt{(1 - x^2)} + 1}{2}\right) = -\frac{2\cdot k\cdot\sqrt{(1 - x^2)}}{n\cdot x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{k^2 + n\cdot(n - 2)}{n\cdot x^4\cdot(n - 1)}$$

Diese 2. Ableitung nach k als Funktion merken:

$$QDDKX(n, k, x) := -\frac{2\cdot k\cdot\sqrt{(1 - x^2)}}{n\cdot x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{k^2 + n\cdot(n - 2)}{n\cdot x^4\cdot(n - 1)}$$

$$QK\left(2,\ n,\ 0,\ \frac{\sqrt{(1 - x^2)} + 1}{2}\right) = \frac{n - 2}{x^4\cdot(n - 1)} - \frac{1}{x^2}$$

$$QK\left(2,\ n,\ n,\ \frac{\sqrt{(1 - x^2)} + 1}{2}\right) = -\frac{2\cdot\sqrt{(1 - x^2)}}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} = \frac{(\sqrt{(1 - x^2)} - 1)^2}{x^4}$$

7.12.4 Ableitung nach n für allg p:

$$QDN(n, k, p) := \frac{Q0P(n, k, p) - Q0P(n - 2, k, p)}{Q0P(n, k, p)}$$

$$QDN\left(n,\ k,\ \frac{\sqrt{(1 - x^2)} + 1}{2}\right) = \frac{(k + n)\cdot(k - n)}{n\cdot x^2\cdot(n - 1)} + 1 = \frac{k^2}{n\cdot x^2\cdot(n - 1)} + \frac{n}{x^2\cdot(1 - n)} + 1$$

Das ist die erste Ableitung nach n; Funktion merken:

$$QDNX(n, k, x) := \frac{(k+n)\cdot(k-n)}{n\cdot x^2\cdot(n-1)} + 1$$

7.12.5 ********* Nun Verhältnis der Abl. d/dn durch d^2/dk^2 für x^2=4p(1-p) allgemein *********

$$\frac{QDNX(n, k, x)}{QDDKX(n, k, x)} = -\frac{x^2\cdot(n\cdot x^2\cdot(n-1) + (k+n)\cdot(k-n))}{2\cdot k\cdot\sqrt{(1-x^2)}\cdot(n-1) + n\cdot x^2\cdot(n-1) - k^2 - n\cdot(n-2)}$$

$$DN\_DDK(n, k, x) := -\frac{x^2\cdot(n\cdot x^2\cdot(n-1) + (k+n)\cdot(k-n))}{2\cdot k\cdot\sqrt{(1-x^2)}\cdot(n-1) + n\cdot x^2\cdot(n-1) - k^2 - n\cdot(n-2)}$$

DN_DDK beinhaltet also (d/dn) geteilt durch (d^2/dk^2)

$DN\_DDK(n, k, 1) = 1$

dies ist der Übliche Zusammenhang im Fall x=1 bzw. p=1/2: erste Ableitung nach n entspricht 2. Ableitung nach k:

$$Q0P\left(n, k, \frac{1}{2}\right) - Q0P\left(n-2, k, \frac{1}{2}\right) = QDP\left(2, n, k, \frac{1}{2}\right) = \frac{Q0(n-2, k-2) - 2\cdot Q0(n-2, k) + Q0(n-2, k+2)}{4}$$

$DN\_DDK(n, k, 0) = 0$

7.12.6 **Ableitungsverhältnisse nahe 0 und im Maximum, Einsetzung in Schroedingergleichung**

Maximum ist in k/n=√(1-x^2), also k=n√(1-x^2), dies eingesetzt:

$$DN\_DDK(n, n\cdot\sqrt{(1-x^2)}, x) = x^2$$

$$\lim_{n\to\infty} DN\_DDK(n, k, x) = \lim_{n\to\infty} DN\_DDK(n, a + b\cdot\sqrt{(c\cdot n)}, x) = -x^2$$

bemerkenswert zu obigen beiden Ergebnissen (+x^2 in k=n·√(1 - x^2), -x^2 nahe k=0) ist nach Einsetzen in die Schroedingergleichung (-ddk+v(k,n))f(k,n)=ih dn f(k,n) nach Substitution f(k,n)->f(ik,in), v(k,n)->v(ik,in):
(ddk+v(ik,in))f(ik,in)=-h dn f(ik,in); kuerzen wir also ab F:=f(ik,in), v:=v(ik,in), so gilt
(ddk+V)F=-h dn F; setzen wir nun ob. Resultat ein, so gilt:
im Maximum von F, also für h=1 und k=n·√(1 - x^2): (ddk+V)F=-x^2 dkk F, also dkk(1+x^2)=-V bzw dkk=-V/(1+x^2)
und für n->inf und h=1 und k nahe 0: (ddk+V)F=x^2 dkk F, also dkk(1-x^2)=-V bzw. dkk=-V/(1-x^2)

Es kann auch umgekehrt gelten dkk=-V/(1-x^2) im Maximum und dkk=-V/(1+x^2) in k nahe 0, denn
es wird auch die zeitumgekehrte Schroedingergleichung (-ddk+v(k,n))f(k,n)=-ih dn f(k,n)
zur Standardfunktion f(k,n)=A exp(-i(Kk-wn)) [anstelle f(k,n)=A exp(i(Kk-wn))] angegeben
bezueglich dieser Schroedingergl. gilt in obigen Ergebnissen das umgekehrte Vorzeichen vor x^2
in beiden Fällen verhält es sich jedenfalls nahe k=0 zeitumgekehrt wie im Maximum

7.12.7 **ein paar weitere Grenzwert für große n:**

Am Rand: Umgekehrte Parabel mit Max in (0,4) und Min in (±1,1):

$$\lim_{n\to\infty} DN\_DDK(n, n-2, x) = DN\_DDK(n, n, x) = 2\cdot\sqrt{(1-x^2)} - x^2 + 2$$

Seitenwechsel n -> -n entspricht Ersatz von p durch 1-p bzw. Vorzeichenwechsel der Wurzel
dann resultiert Topf mit Max in (±1,1) und Min in (0,0):

$$\lim_{n\to\infty} DN\_DDK(n, -(n-2), x) = DN\_DDK(n, -n, x) = -2\cdot\sqrt{(1-x^2)} - x^2 + 2$$

$$DN\_DDK(n, n, \sqrt{(4\cdot p\cdot(1-p))}) = 4\cdot p^2$$

$$DN\_DDK(1, k, x) = x^2$$

$$DN\_DDK(2, 0, x) = 2 - x^2$$

folg. ähnlich halbe Ellipse mit Max in (0,2) und Min in (±1,0)

$$DN\_DDK(4, 2, x) = \sqrt{(1-x^2)} - x^2 + 1$$

Die Graphen für k=0 haben in x=±√(1 - 1/(n - 1)) bzw. n=1+1/(1-x^2) Sprungstellen, gehen gegen -x^2 für n->∞

$$DN\_DDK(n, 0, x) = \frac{x^2\cdot(n - x^2\cdot(n - 1))}{x^2\cdot(n - 1) - n + 2} = \frac{2\cdot(n - 2)}{(n - 1)\cdot(x^2\cdot(n - 1) - n + 2)} - x^2 + \frac{2}{n - 1}$$

$$DN\_DDK(4, 0, x) = \frac{x^2\cdot(3\cdot x^2 - 4)}{2 - 3\cdot x^2} = \frac{4}{3\cdot(3\cdot x^2 - 2)} - x^2 + \frac{2}{3}$$

$$DN\_DDK(6, 0, x) = \frac{x^2\cdot(5\cdot x^2 - 6)}{4 - 5\cdot x^2} = \frac{8}{5\cdot(5\cdot x^2 - 4)} - x^2 + \frac{2}{5}$$

******* Ende Betrachtungen d/dn / d^2/dk^2

7.13 nun finite Differenzen gewichtet (Past Difference), dass Ableitungsvorfaktoren bei allg. p analog dem Fall p= 1/2

```
QPD(d, n, k, p) :=
  If d = 0
     Q0P(n, k, p)
     (1 − p)·QPD(d − 1, n − 1, k + 1, p) − p·QPD(d − 1, n − 1, k − 1, p)
```

es ergibt sich die gleiche Tabelle von Vorfaktoren wie bei Q0 wegen

$$\frac{QPD(d, n, k, p)}{Q0P(n, k, p)} = \frac{QDP\left(d, n, k, \frac{1}{2}\right)}{Q0(n, k)}$$

wegen

$$QPD(2, n, k, p) = p^2\cdot Q0P(n - 2, k - 2, p) - 2\cdot p\cdot(1 - p)\cdot Q0P(n - 2, k, p) + (1 - p)^2\cdot Q0P(n - 2, k + 2, p)$$

$$Q0P(n, k, p) = p^2\cdot Q0P(n - 2, k - 2, p) + 2\cdot p\cdot(1 - p)\cdot Q0P(n - 2, k, p) + (1 - p)^2\cdot Q0P(n - 2, k + 2, p)$$

entspricht 2. past Differenz (nach k) folgender gewichteter vertikaler Differenz nach n:

$$QPD(2, n, k, p) = Q0P(n, k, p) - 4\cdot p\cdot(1 - p)\cdot Q0P(n - 2, k, p)$$

allgemeiner

$$QPD(2\cdot j, 2\cdot n, 0, p) = (4\cdot p\cdot(1 - p))^n\cdot QPD\left(2\cdot j, 2\cdot n, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$QPD(2\cdot j + 1, 2\cdot n, 1, p) = (4\cdot p\cdot(1 - p))^n\cdot\sqrt{\left(\frac{p}{1 - p}\right)}\cdot QPD\left(2\cdot j + 1, 2\cdot n, 1, \frac{1}{2}\right)$$

im Startpunkt gilt:
$QPD(d, 0, 0, p) = 1$

Aufgrund Definition können die past Differences in die negativen Binomialkoeffizienten reinrutschen, z.B.:

$$QPD(2, 0, k, p) = \left[-4, 0, -2, 0, 0, 1, 2, \frac{4\cdot p}{p - 1}, 4, \frac{8\cdot p^2}{(p - 1)^2}\right]$$

$$QPD(2, 1, k, p) = \left[-3, 0, -1, 1 - p, 1, - 3\cdot p, 3, \frac{4\cdot p^2}{1 - p}, 5, - \frac{4\cdot p^3}{(p - 1)^2}\right]$$

$$QPD(2, 2, k, p) = \left[-4, 0, -2, (p - 1)^2, 0, 2\cdot p\cdot(p - 1), 2, p^2, 4, 0\right]$$

$$QPD\left(2, 0, k, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 8 & 16 & 12 & 24 \\ -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -12 & 10 & -20 & 14 & -28 \end{bmatrix}$$

$$QPD\left(2, 1, k, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 5 & -2 & 9 & -2 & 13 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 & 2 & 7 & 2 & 11 & 2 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

$$QPD\left(2, 2, k, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ -2 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{1}{4} & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

7.13.1 Rueckrechnung auf x^2=4p(1-p); wegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} QPD\left(0, 2\cdot m, 0, \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} QPD\left(2, 2\cdot m, 0, \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right) = \sqrt{(1 - x^2)}$$

gilt

$$x^2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} - \sqrt{(1 - x^2)}}{\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}} = \frac{\left(\sum_{m=0}^{\infty} QPD\left(0, 2\cdot m, 0, \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)\right) - \sum_{m=0}^{\infty} QPD\left(2, 2\cdot m, 0, \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} QPD\left(0, 2\cdot m, 0, \frac{1 - \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)}$$

----

definiert man

$$QPDSP(d1, d2, n, p) := \sum_{k=-n/2}^{n/2} \frac{1}{Q0P(n, 2\cdot k, p)}\cdot QPD(d1, n, 2\cdot k, p)\cdot QPD(d2, n, 2\cdot k, p)$$

so gilt nicht mehr notwendig QPDSP(d1,d2,n,p)=0 für d1 ungleich d2,
(wie oben bei QSP mit QDP anstelle QPD) d.h. die QPD sind nicht mehr orthogonal

7.13.2 Zusatz: Analoge Def. wie für QDP geht mit rekursiver Zählung andersrum; für

```
QDPM(d, n, k, p) :=
  If d = 0
     Q0P(n, k, p)
     (QDPM(d - 1, n + 1, k + 1, p) - QDPM(d - 1, n + 1, k - 1, p))/2
```

gilt

$$QDP(d, n + 2\cdot d, k, p) = QDPM(d, n, k, p)$$

7.13.3 Summe der Ableitungen über k nur ungleich 0 bei Ableitungsgrad 0 (bekannt)

$$\sum_{k=-n}^{n} QDP\left(0, 2\cdot n, 2\cdot k, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-n-1}^{n} QDP\left(0, 2\cdot n + 1, 2\cdot k + 1, \frac{1}{2}\right) = 1$$

Für d>=1 gilt aufgrund Vorzeichenwechsel:

$$\sum_{k=-n}^{n} QDP\left(d, 2\cdot n, 2\cdot k, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-n-1}^{n} QDP\left(d, 2\cdot n + 1, 2\cdot k + 1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} QDP(1, 2\cdot n, 2\cdot k, p)\cdot QDP(0, 2\cdot n, 2\cdot k, p)\cdot 2\right)\cdot\text{->0 fuer 0<dp<<1, 0+dp<p<1-dp und n->inf}$$

7.14 *Skalarprodukt der Ersten Abl. ergibt negative 2. Abl. im Zentrum*

$$\sum_{k=-n}^{n} QDP\left(1,\ 2\cdot n,\ 2\cdot k,\ \frac{1}{2}\right)^2 = -\ QDP\left(2,\ 4\cdot n,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=-n-1}^{n} QDP\left(1,\ 2\cdot n+1,\ 2\cdot k+1,\ \frac{1}{2}\right)^2 = -\ QDP\left(2,\ 4\cdot n+2,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

7.14.1 Skalarprodukt der 2. Ableitung ergibt 4. Abl. im Zentrum

$$\sum_{k=-n}^{n} QDP\left(2,\ 2\cdot n,\ 2\cdot k,\ \frac{1}{2}\right)^2 = QDP\left(4,\ 4\cdot n,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=-n-1}^{n} QDP\left(2,\ 2\cdot n+1,\ 2\cdot k+1,\ \frac{1}{2}\right)^2 = QDP\left(4,\ 4\cdot n+2,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

Allgemein gilt für ganzzahliges d>=0:

7.14.2 Skalarprodukt der d. Ableitung ergibt (-1)^d mal 2d. Ableitung im Zentrum:

$$\sum_{k=-n}^{n} QDP\left(d,\ 2\cdot n,\ 2\cdot k,\ \frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^d\cdot QDP\left(2\cdot d,\ 4\cdot n,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=-n-1}^{n} QDP\left(d,\ 2\cdot n+1,\ 2\cdot k+1,\ \frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^d\cdot QDP\left(2\cdot d,\ 4\cdot n+2,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

Abweichung der Q1 vom Rand auch bei variablem p konstant:
Für allgemeine p: Wiederholung bekannter Summen (Binomialentwicklung):

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q0P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 1$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q1P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 0$$

7.15 *Abweichungen vom Rand (v->0, Tieftemperaturphysik); für alle p und n>0 gilt*

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (n+2\cdot k)\cdot Q0P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 2\cdot n\cdot p$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (-n-2\cdot k)\cdot Q1P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 1$$

7.16 *Abweichungen vom Ursprung (v->C, Photonen): für alle p und n>0 gilt*

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2\cdot k)\cdot Q0P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 2\cdot n\cdot p - n = n\cdot(2\cdot p - 1)$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (-\ 2\cdot k)\cdot Q1P(n,\ 2\cdot k,\ p) = 1$$

7.17 *------ nun d/dn / d/dk^2 für verschiedene p:*

$$f1(n,\ k) := \frac{4\cdot(Q0P(n+2,\ k,\ p) - Q0P(n,\ k,\ p))}{Q0P(n,\ k-2,\ p) - 2\cdot Q0P(n,\ k,\ p) + Q0P(n,\ k+2,\ p)}$$

Spezialfall k=0 übersichtlich:

$$f1(n,\ 0) = \frac{2}{n\cdot\left(1 - \frac{1}{4\cdot p\cdot(1-p)}\right) + 1} - 4\cdot p\cdot(1-p)$$

1 bei p=1/2, dann größer als 1, dann Polstellen bei $p = 1/2 - \sqrt{2}/4 \vee p = \sqrt{2}/4 + 1/2$ und Vorzeichenwechsel auf negat iv

die 1. Ableitung nach dn ist also um p=1/2 größergleich der 2. Ableitung nach dk in k=0

$$f1(n,\ n) = \frac{4\cdot p\cdot (1 - 2\cdot p)}{2\cdot p - n\cdot (1 - p)} + 4\cdot p^{2}$$

hat für n> 0 Pol bei p = n/(n + 2) bzw. n = 2·p/(1 - p)
f1(n,n)=1 in p=1/2 und für n>=3 dort streng monoton wachsend,
d.h. in Umgebung von p=0.5 gilt f1(n,n)>1 für p>0.5 und f1(n,n)<1 für p<0.5
Für f1(n,n/2) ist das ab n>=6 auch so.

7.17.1 **Nun (unübersichtlicher) Allgemeinfall:**

$$f(n) := \frac{f1(n,\ k)}{4\cdot p\cdot (1 - p)}$$

TAB2(0,3,1)

$$\begin{bmatrix}
0 & \dfrac{k^{2} - 4\cdot (2\cdot p^{2} - 2\cdot p + 1)}{k^{2} + 2\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 8\cdot p\cdot (p - 1)} & 4 & \dfrac{k^{2} - 12\cdot (10\cdot p^{2} - 10\cdot p + 3)}{k^{2} + 10\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 24\cdot (5\cdot p^{2} - 5\cdot p + 1)} \\
1 & \dfrac{k^{2} - 3\cdot (8\cdot p^{2} - 8\cdot p + 3)}{k^{2} + 4\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 3\cdot (8\cdot p^{2} - 8\cdot p + 1)} & 5 & \dfrac{k^{2} - 7\cdot (24\cdot p^{2} - 24\cdot p + 7)}{k^{2} + 12\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 7\cdot (24\cdot p^{2} - 24\cdot p + 5)} \\
2 & \dfrac{k^{2} - 16\cdot (3\cdot p^{2} - 3\cdot p + 1)}{k^{2} + 6\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 8\cdot (6\cdot p^{2} - 6\cdot p + 1)} & 6 & \dfrac{k^{2} - 32\cdot (7\cdot p^{2} - 7\cdot p + 2)}{k^{2} + 14\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 16\cdot (14\cdot p^{2} - 14\cdot p + 3)} \\
3 & \dfrac{k^{2} - 5\cdot (16\cdot p^{2} - 16\cdot p + 5)}{k^{2} + 8\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 5\cdot (16\cdot p^{2} - 16\cdot p + 3)} & 7 & \dfrac{k^{2} - 9\cdot (32\cdot p^{2} - 32\cdot p + 9)}{k^{2} + 16\cdot k\cdot (1 - 2\cdot p) + 9\cdot (32\cdot p^{2} - 32\cdot p + 7)}
\end{bmatrix}$$

ende

8 <u>Zusatz: Q0Z, ΣQ0Z, Q0Zo Wertetabellen</u>

8.1.1.1.1.1.1 <u>F (n) := Q0Z(n)</u>

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 4 & \dfrac{3}{8} & 8 & \dfrac{35}{128} & 12 & \dfrac{231}{1024} & 16 & \dfrac{6435}{32768} \\
2 & \dfrac{1}{2} & 6 & \dfrac{5}{16} & 10 & \dfrac{63}{256} & 14 & \dfrac{429}{2048} & 18 & \dfrac{12155}{65536}
\end{bmatrix}$$

"Q0Z (2/π)=0.72143736878=1/1.3861217110"
"Q0Z (π/2)=0.54728735932=1/1.8271936725"
"Q0Z (π)=0.41622911171=1/2.4025229659"
"Q0Z (2 π)=0.30594332560=1/3.2685792312"
"Q0Z (4 π)=0.22065011909=1/4.5320619092"

0	1	24	0.16118025779	48	0.11456650271	72	0.093705675296
2	0.5	26	0.15498101711	50	0.11227517265	74	0.092439382387
4	0.375	28	0.14944598078	52	0.11011603472	76	0.091223074724
6	0.3125	30	0.14446444809	54	0.10807684889	78	0.090053548125
8	0.2734375	32	0.13994993409	56	0.10614690516	80	0.088927878773
10	0.24609375	34	0.13583375955	58	0.10431678611	82	0.087843392447
12	0.2255859375	36	0.13206059957	60	0.10257817300	84	0.086797637775
14	0.20947265625	38	0.12858532063	62	0.10092368634	86	0.085788362917
16	0.19638061523	40	0.12537068761	64	0.099346753747	88	0.084813495157
18	0.18547058105	42	0.12238567124	66	0.097841499903	90	0.083871122988

20	0.17619705200	44	0.11960417871	68	0.096402654316	92	0.082959480347
22	0.16818809509	46	0.11700408787	70	0.095025473540	94	0.082076932684

130	0.069844660691	134	0.068798254366	138	0.067797512495	142	0.066839207615
132	0.069315534474	136	0.068292384849	140	0.067313244548	144	0.066375046451

Genauigkeit der Abschätzung durch √(2/(πn)):

$$F(n) := \sqrt{\left[\frac{2}{\pi\ n}\right]} \ /\ Q0Z(n)$$

0	1/0	4	1.0638460810	8	1.0316609527	12	1.0210274431
20	1.0125731934	60	1.0041751656	100	1.0025030858	140	1.0017872944

8.1.1.1.1.1.2 F (n) := 1/Q0Z (n)

0	1	24	6.2042337794	48	8.7285548246	72	10.671712218
2	2	26	6.4524031305	50	8.9066885965	74	10.817900057
4	2.6666666666	28	6.6913810243	52	9.0813295494	76	10.962138724
6	3.2	30	6.9221183010	54	9.2526753899	78	11.104504162
8	3.6571428571	32	7.1454124397	56	9.4209058516	80	11.245067506
10	4.0634920634	34	7.3619400894	58	9.5861849016	82	11.383895500
12	4.4329004329	36	7.5722812348	60	9.7486626118	84	11.521050867
14	4.7738927738	38	7.7769374844	62	9.9084767530	86	11.656592642
16	5.0921522921	40	7.9763461378	64	10.065754161	88	11.790576466
18	5.3916906622	42	8.1708911656	66	10.220611918	90	11.923054853
20	5.6754638550	44	8.3609118904	68	10.373158364	92	12.054077434
22	5.9457240386	46	8.5467099324	70	10.523493993	94	12.183691169

130	14.317486692	134	14.535252517	138	14.749803690	142	14.961278502
132	14.426780484	136	14.642921054	140	14.855917386	144	15.065902827

8.1.1.1.1.1.3 Summe der Q0Z:

$$F(n) := \left[\sum_{x=0}^{n/2} Q0Z(2\ x)\right] \quad \text{"=(n + 1) Q0Z (n) = (n+2) Q0Z(n+2) = Abw(n+2)"}$$

"F (n) = 2 für n = 4.7635005302; also Q0Z(n)=0.34701133269=1/2.8817502651"
"F (n) = 3 für n = 12.628344148; also Q0Z(n)=0.22012945721=1/4.5427813831"
"F (n) = 4 für n=23.627771077; Q0Z(n)=0.16241827114=1/6.1569427686"
"F (n) = 5 für n=37.766725986;Q0Z(n)=0.12897658684=1/7.7533451962"
"F (n) = π für n = 13.995090003;Q0Z(n)=0.20950808917=1/4.7730853923"

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dfrac{3}{2} & 4 & \dfrac{15}{8} & 6 & \dfrac{35}{16} & 8 & \dfrac{315}{128} \\ 1 & \dfrac{4}{\pi} & 3 & \dfrac{16}{3\ \pi} & 5 & \dfrac{32}{5\ \pi} & 7 & \dfrac{256}{35\ \pi} & 9 & \dfrac{512}{63\ \pi} \end{bmatrix}$$

Wegen des möglichen Zusammenhangs mit Eigenzeit folg. Tab. ausführlicher:

0	1	56	6.0503735944	112	8.5004144167	168	10.387854489	224	11.981573834
1	1.2732395447	57	6.1027548499	113	8.5377783354	169	10.418451800	225	12.008110999
2	1.5	58	6.1546903805	114	8.5749794554	170	10.448959515	226	12.034589648
3	1.6976527263	59	6.2061913728	115	8.6120198862	171	10.479378418	227	12.061010166
4	1.875	60	6.2572685535	116	8.6489016921	172	10.509709280	228	12.087372936
5	2.0371832715	61	6.3079322150	117	8.6856268938	173	10.539952860	229	12.113678333
6	2.1875	62	6.3581922398	118	8.7221974692	174	10.570109908	230	12.139926731
7	2.3282094532	63	6.4080581231	119	8.7586153551	175	10.600181162	231	12.166118499
8	2.4609375	64	6.4575389936	120	8.7948824481	176	10.630167351	232	12.192254001
9	2.5868993924	65	6.5066436327	121	8.8310006059	177	10.660069191	233	12.218333600
10	2.70703125	66	6.5553804935	122	8.8669716485	178	10.689887392	234	12.244357651
11	2.8220720645	67	6.6037577168	123	8.9027973588	179	10.719622650	235	12.270326509
12	2.9326171875	68	6.6517831478	124	8.9384794843	180	10.749275655	236	12.296240522
13	3.0391545310	69	6.6994643504	125	8.9740197377	181	10.778847085	237	12.322100038
14	3.1420898437	70	6.7468086213	126	9.0094197977	182	10.808337609	238	12.347905399
15	3.2417648330	71	6.7938230032	127	9.0446813104	183	10.837747889	239	12.373656942
16	3.3384704589	72	6.8405142966	128	9.0798058899	184	10.867078575	240	12.399355004

17	3.4324568820	73	6.8868890717	129	9.1147951190	185	10.896330310	241	12.424999917
18	3.5239410400	74	6.9329536790	130	9.1496505506	186	10.925503728	242	12.450592009
19	3.6131125074	75	6.9787142594	131	9.1843737077	187	10.954599456	243	12.476131604
20	3.7001380920	76	7.0241767537	132	9.2189660850	188	10.983618110	244	12.501619025
21	3.7851654840	77	7.0693469121	133	9.2534291491	189	11.012560299	245	12.527054590
22	3.8683261871	78	7.1142303019	134	9.2877643394	190	11.041426626	246	12.552438614
23	3.9497378963	79	7.1588323160	135	9.3219730688	191	11.070217683	247	12.577771410
24	4.0295064449	80	7.2031581806	136	9.3560567243	192	11.098934056	248	12.603053286
25	4.1077274122	81	7.2472129619	137	9.3900166678	193	11.127576324	249	12.628284548
26	4.1844874620	82	7.2910015731	138	9.4238542368	194	11.156145057	250	12.653465499
27	4.2598654645	83	7.3345287807	139	9.4575707446	195	11.184640818	251	12.678596439
28	4.3339334428	84	7.3777992109	140	9.4911674813	196	11.213064164	252	12.703677664
29	4.4067573770	85	7.4208173546	141	9.5246457144	197	11.241415644	253	12.728709469
30	4.4783978909	86	7.4635875738	142	9.5580066889	198	11.269695801	254	12.753692143
31	4.5489108408	87	7.5061141058	143	9.5912516285	199	11.297905170	255	12.778625976
32	4.6183478250	88	7.5484010689	144	9.6243817354	200	11.326044280	256	12.803511253
33	4.6867566239	89	7.5904524666	145	9.6573981914	201	11.354113654	257	12.828348256
34	4.7541815845	90	7.6322721919	146	9.6903021582	202	11.382113807	258	12.853137266
35	4.8206639560	91	7.6738640321	147	9.7230947778	203	11.410045248	259	12.877878558
36	4.8862421841	92	7.7152316723	148	9.7557771728	204	11.437908482	260	12.902572409
37	4.9509521710	93	7.7563786991	149	9.7883504474	205	11.465704005	261	12.927219089
38	5.0148275047	94	7.7973086050	150	9.8208156873	206	11.493432310	262	12.951818869
39	5.0778996626	95	7.8380247907	151	9.8531739603	207	11.521093880	263	12.976372014
40	5.1401981924	96	7.8785305696	152	9.8854263168	208	11.548689196	264	13.000878789
41	5.2017508739	97	7.9188291700	153	9.9175737901	209	11.576218731	265	13.025339455
42	5.2625838636	98	7.9589237387	154	9.9496173968	210	11.603682954	266	13.049754273
43	5.3227218244	99	7.9988173434	155	9.9815581371	211	11.631082327	267	13.074123498
44	5.3821880423	100	8.0385129761	156	10.013396995	212	11.658417307	268	13.098447386
45	5.4410045316	101	8.0780135548	157	10.045134940	213	11.685688347	269	13.122726188
46	5.4991921302	102	8.1173219268	158	10.076772925	214	11.712895893	270	13.146960154
47	5.5567705855	103	8.1564408708	159	10.108311889	215	11.740040386	271	13.171149532
48	5.6137586329	104	8.1953730992	160	10.139752756	216	11.767122263	272	13.195294566
49	5.6701740668	105	8.2341212601	161	10.171096435	217	11.794141955	273	13.219395501
50	5.7260338056	106	8.2726879397	162	10.202343823	218	11.821099888	274	13.243452575
51	5.7813539505	107	8.3110756644	163	10.233495800	219	11.847996484	275	13.267466030
52	5.8361498403	108	8.3492869021	164	10.264553236	220	11.874832160	276	13.291436099
53	5.8904361005	109	8.3873240650	165	10.295516987	221	11.901607328	277	13.315363019
54	5.9442266892	110	8.4251895103	166	10.326387894	222	11.928322395	278	13.339247021
55	5.9975349387	111	8.4628855430	167	10.357166789	223	11.954977764	279	13.363088334

8.1.1.1.1.1.4 F (n) := -Q2Z (n)

$$\begin{bmatrix} 0 & ? & 6 & \frac{1}{16} & 12 & \frac{21}{1024} & 18 & \frac{715}{65536} & 24 & \frac{29393}{4194304} \\ 2 & \frac{1}{2} & 8 & \frac{5}{128} & 14 & \frac{33}{2048} & 20 & \frac{2431}{262144} & 26 & \frac{52003}{8388608} \\ 4 & \frac{1}{8} & 10 & \frac{7}{256} & 16 & \frac{429}{32768} & 22 & \frac{4199}{524288} & 28 & \frac{185725}{33554432} \end{bmatrix}$$

0	?	6	0.0625	12	0.0205078125	18	0.010910034179	24	0.0070078372955
2	0.5	8	0.0390625	14	0.01611328125	20	0.0092735290527	26	0.0061992406845
4	0.125	10	0.02734375	16	0.013092041015	22	0.0080089569091	28	0.0055350363254

```
(wpoloch.txt)  (Space)0(Space) durch (Space)#249(Space) ersetzt
HPOP15 (x1, pab, p) := ITERATES (FPOP (x, pab, p), x, x1, 15)
```

8.2 "Q0M(n,k): Q0-Dreieck ausführlich mit Vorzeichenwechsel, PRausfluss=0, Preli=±0.5"

```
HPOP15 (v0, 0, 1)
```

nk	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***
0	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
1	..	$\frac{-1}{2}$	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
2	$\frac{-1}{2}$	..	$\frac{1}{4}$	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
3	..	$\frac{3}{8}$	..	$\frac{-1}{8}$	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
4	$\frac{3}{8}$	..	$\frac{-1}{4}$	..	$\frac{1}{16}$	..	..	..	..	..	..	..	..	..
5	..	$\frac{-5}{16}$	..	$\frac{5}{32}$	..	$\frac{-1}{32}$	..	..	..	..	..	..	..	..
6	$\frac{-5}{16}$	..	$\frac{15}{64}$	..	$\frac{-3}{32}$	..	$\frac{1}{64}$	..	..	..	..	..	..	..

7	..	35/128	..	-21/128	..	7/128	..	-1/128	..	..	..	..	..	..	
8	35/128	..	-7/32	..	7/64	..	-1/32	..	1/256	..	..	..	..	..	
9	..	-63/256	..	21/128	..	-9/128	..	9/512	..	-1/512	..	..	..	..	
10	-63/256	..	105/512	..	-15/128	..	45/1024	..	-5/512	..	1/1024	..	..	..	
11	..	231/1024	..	-165/1024	..	165/2048	..	-55/2048	..	11/2048	..	-1/2048	..	..	
12	231/1024	..	-99/512	..	495/4096	..	-55/1024	..	33/2048	..	-3/1024	..	1/4096	..	
13	..	-429/2048	..	1287/8192	..	-715/8192	..	143/4096	..	-39/4096	..	13/8192	..	-1/8192	
14	-429/2048	..	3003/16384	..	-1001/8192	..	1001/16384	..	-91/4096	..	91/16384	..	-7/8192	..	--/1
15	..	6435/32768	..	-5005/32768	..	3003/32768	..	-1365/32768	..	455/32768	..	-105/32768	..	15/32768	

approx:

nk	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1	..	..	..	..	..	..	..	
1	..	-0.5	..	..	..	..	..	..	
2	-0.5	..	0.25	..	..	..	..	..	
3	..	0.375	..	-0.125	..	..	..	..	
4	0.375	..	-0.25	..	0.0625	..	..	..	
5	..	-0.3125	..	0.15625	..	-0.03125	..	..	
6	-0.3125	..	0.234375	..	-0.09375	..	0.015625	..	
7	..	0.2734375	..	-0.1640625	..	0.0546875	..	-0.0078125	
8	0.2734375	..	-0.21875	..	0.109375	..	-0.03125	..	
9	..	-0.24609375	..	0.1640625	..	-0.0703125	..	0.017578125	
10	-0.24609375	..	0.205078125	..	-0.1171875	..	0.0439453125	..	
11	..	0.2255859375	..	-0.1611328125	..	0.08056640625	..	-0.02685546875	
12	0.2255859375	..	-0.193359375	..	0.12084960937	..	-0.0537109375	..	
13	..	-0.20947265625	..	0.15710449218	..	-0.087280273437	..	0.034912109375	
14	-0.20947265625	..	0.18328857421	..	-0.12219238281	..	0.061096191406	..	0
15	..	0.19638061523	..	-0.15274047851	..	0.091644287109	..	-0.041656494140	

8.3 "Q1M(n,k): Q1-Dreieck ausführlich mit Vorzeichenwechsel, PRausfluss=1, Preli=±0.5"

HPOP15 (v0, 1, 1)

nk	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
1	..	1/2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
2	..	..	-1/4	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
3	..	-1/8	..	1/8	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
4	..	..	1/8	..	-1/16	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
5	..	1/16	..	-3/32	..	1/32	..	..	..	..	..	..	..	..	..
6	..	..	-5/64	..	1/16	..	-1/64	..	..	..	..	..	..	..	..
7	..	-5/128	..	9/128	..	-5/128	..	1/128	..	..	..	..	..	..	..

8	..	..	$\frac{7}{128}$	..	$\frac{-7}{128}$	..	$\frac{3}{128}$	..	$\frac{-1}{256}$	..	..	..	..	..	..
9	..	$\frac{7}{256}$	..	$\frac{-7}{128}$	..	$\frac{5}{128}$	..	$\frac{-7}{512}$	..	$\frac{1}{512}$	..	..	..	..	..
10	..	..	$\frac{-21}{512}$	..	$\frac{3}{64}$	..	$\frac{-27}{1024}$	..	$\frac{1}{128}$	..	$\frac{-1}{1024}$	..	..	..	..
11	..	$\frac{-21}{1024}$	..	$\frac{45}{1024}$	..	$\frac{-75}{2048}$	..	$\frac{35}{2048}$	..	$\frac{-9}{2048}$	..	$\frac{1}{2048}$	..	..	..
12	..	..	$\frac{33}{1024}$	..	$\frac{-165}{4096}$	..	$\frac{55}{2048}$	..	$\frac{-11}{1024}$	..	$\frac{5}{2048}$	..	$\frac{-1}{4096}$	..	..
13	..	$\frac{33}{2048}$	..	$\frac{-297}{8192}$	..	$\frac{275}{8192}$	..	$\frac{-77}{4096}$	..	$\frac{27}{4096}$	..	$\frac{-11}{8192}$	..	$\frac{1}{8192}$	..
14	..	..	$\frac{-429}{16384}$	..	$\frac{143}{4096}$	..	$\frac{-429}{16384}$	..	$\frac{13}{1024}$	..	$\frac{-65}{16384}$	..	$\frac{3}{4096}$	..	$\frac{-1}{16384}$
15	..	$\frac{-429}{32768}$	..	$\frac{1001}{32768}$	..	$\frac{-1001}{32768}$	..	$\frac{637}{32768}$	..	$\frac{-273}{32768}$	..	$\frac{77}{32768}$	..	$\frac{-13}{32768}$	..

Approx:

nk	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1	..	..	..	..	..	..	..	..
1	..	0.5	..	..	..	..	..	..	..
2	..	..	-0.25	..	..	..	..	..	..
3	..	-0.125	..	0.125	..	..	..	..	..
4	..	..	0.125	..	-0.0625	..	..	..	..
5	..	0.0625	..	-0.09375	..	0.03125	..	..	..
6	..	..	-0.078125	..	0.0625	..	-0.015625	..	..
7	..	-0.0390625	..	0.0703125	..	-0.0390625	..	0.0078125	..
8	..	..	0.0546875	..	-0.0546875	..	0.0234375	..	-0.003906
9	..	0.02734375	..	-0.0546875	..	0.0390625	..	-0.013671875	..
10	..	..	-0.041015625	..	0.046875	..	-0.0263671875	..	0.00781
11	..	-0.0205078125	..	0.0439453125	..	-0.03662109375	..	0.01708984375	..
12	..	..	0.0322265625	..	-0.040283203125	..	0.02685546875	..	-0.0107421
13	..	0.01611328125	..	-0.036254882812	..	0.033569335937	..	-0.018798828125	..
14	..	..	-0.026184082031	..	0.034912109375	..	-0.026184082031	..	0.0126953
15	..	-0.013092041015	..	0.030548095703	..	-0.030548095703	..	0.019439697265	..

8.4 "nun Wegmöglichkeiten Q0-Dreieck (Q0M) mit Vorzeichenwechsel:"

nk	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18							
0	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
1	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1	2
2	-2	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2	2	6
3	..	3	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	4	14
4	6	..	-4	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	6	8	30
5	..	-10	..	5	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	16	62
6	-20	..	15	..	-6	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	20	32	126
7	..	35	..	-21	..	7	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	64	254
8	70	..	-56	..	28	..	-8	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	70	128	510
9	..	-126	..	84	..	-36	..	9	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	256	1022
10	-252	..	210	..	-120	..	45	..	-10	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	252	512	2046
11	..	462	..	-330	..	165	..	-55	..	11	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1024	4094
12	924	..	-792	..	495	..	-220	..	66	..	-12	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	924	2048	8190
13	..	-1716	..	1287	..	-715	..	286	..	-78	..	13	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	4096	16382
14	-3432	..	3003	..	-2002	..	1001	..	-364	..	91	..	-14	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	3432	8192	32766
15	..	6435	..	-5005	..	3003	..	-1365	..	455	..	-105	..	15	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	16384	65534

8.5 "nun Wegmöglichkeiten Dreieck Q1M incl Vorzeichenwechsel:"

WHPOP15 (v0, 1, 1)

nk	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18							
0	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
1	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1	2
2	..	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2	2	6
3	..	-1	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2	14
4	..	..	2	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2	4	30
5	..	2	..	-3	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	6	62
6	..	..	-5	..	4	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	4	12	126
7	..	-5	..	9	..	-5	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	20	254
8	..	..	14	..	-14	..	6	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	10	40	510
9	..	14	..	-28	..	20	..	-7	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	70	1022
10	..	..	-42	..	48	..	-27	..	8	..	-1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	28	140	2046
11	..	-42	..	90	..	-75	..	35	..	-9	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	252	4094

12	¨	¨	132	¨	-165	¨	110	¨	-44	¨	10	¨	-1	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	84	504	8190
13	¨	132	¨	-297	¨	275	¨	-154	¨	54	¨	-11	¨	1	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	924	16382
14	¨	¨	-429	¨	572	¨	-429	¨	208	¨	-65	¨	12	¨	-1	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	264	1848	32766
15	¨	-429	¨	1001	¨	-1001	¨	637	¨	-273	¨	77	¨	-13	¨	1	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	¨	3432	65534

Ab jetzt kein Betragsadd (Vorzeichen nun wegen Ableitung)

8.6 Nun 2.Ableitung von Q0 nach k (horizontal; also erste Ableitung von Q1)

(n te Ableitung resultiert, wenn mit Zeile n vom Q0-Dreieck gestartet wird, wobei diese mit
abwechselnden Vorzeichen versehen sein muss, d.h. mal -1 von k nach k+2,
die folgenden Zeilen dann positive Addition wie beim Pascaldreieck und mal p=1/2)

Also hier: 2. Ableitung (Linie k=0 ergibt sich analog -Q2Z(n))

n											
2	$\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{4}$	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	$\frac{1}{8}$	.	$-\frac{1}{8}$	.	.	.	.	.	.	.
4	$\frac{1}{8}$	.	0	.	$-\frac{1}{16}$	.	.	.	.	.	.
	.	$\frac{1}{16}$	.	$-\frac{1}{32}$	.	$-\frac{1}{32}$	.	.	.	.	.
6	$\frac{1}{16}$	.	$\frac{1}{64}$	.	$-\frac{1}{32}$	.	$-\frac{1}{64}$	.	.	.	.
	.	$\frac{5}{128}$	.	$-\frac{1}{128}$	.	$-\frac{3}{128}$	.	$-\frac{1}{128}$	.	.	.
8	$\frac{5}{128}$	.	$\frac{1}{64}$	.	$-\frac{1}{64}$	.	$-\frac{1}{64}$	.	$-\frac{1}{256}$	.	.
	.	$\frac{7}{256}$	.	0	.	$-\frac{1}{64}$	.	$-\frac{5}{512}$	.	$-\frac{1}{512}$	.
10	$\frac{7}{256}$	.	$\frac{7}{512}$	.	$-\frac{1}{128}$	.	$-\frac{13}{1024}$	.	$-\frac{3}{512}$	.	$-\frac{1}{1024}$
	.	$\frac{21}{1024}$	.	$\frac{3}{1024}$	.	$-\frac{21}{2048}$	.	$-\frac{19}{2048}$	.	$-\frac{7}{2048}$	.
12	$\frac{21}{1024}$	.	$\frac{3}{256}$	.	$-\frac{15}{4096}$	.	$-\frac{5}{512}$	.	$-\frac{13}{2048}$	.	$-\frac{1}{512}$
	.	$\frac{33}{2048}$	.	$\frac{33}{8192}$	.	$-\frac{55}{8192}$	.	$-\frac{33}{4096}$	.	$-\frac{17}{4096}$	.
14	$\frac{33}{2048}$	.	$\frac{165}{16384}$	.	$-\frac{11}{8192}$	.	$-\frac{121}{16384}$	.	$-\frac{25}{4096}$	.	$-\frac{43}{16384}$
	.	$\frac{429}{32768}$	.	$\frac{143}{32768}$	.	$-\frac{143}{32768}$	.	$-\frac{221}{32768}$	.	$-\frac{143}{32768}$	.
16	$\frac{429}{32768}$	.	$\frac{143}{16384}$	.	0	.	$-\frac{91}{16384}$	.	$-\frac{91}{16384}$	.	$-\frac{49}{16384}$
	.	$\frac{715}{65536}$	.	$\frac{143}{32768}$	.	$-\frac{91}{32768}$	.	$-\frac{91}{16384}$	.	$-\frac{35}{8192}$	.
18	$\frac{715}{65536}$	.	$\frac{1001}{131072}$	.	$\frac{13}{16384}$	.	$-\frac{273}{65536}$	.	$-\frac{161}{32768}$	.	$-\frac{205}{65536}$
	.	$\frac{2431}{262144}$	.	$\frac{1105}{262144}$	.	$-\frac{221}{131072}$	.	$-\frac{595}{131072}$	.	$-\frac{527}{131072}$	.

$$20 \quad \left| \; \frac{2431}{262144} \quad . \quad \frac{221}{32768} \quad . \quad \frac{663}{524288} \quad . \quad - \frac{51}{16384} \quad . \quad - \frac{561}{131072} \quad . \quad - \frac{51}{16384} \right.$$