to home

Kurze Formelsammlung

Es werden einige Definitionen und Formeln aus dem Haupttext in komprimierter Form wiedergegeben[1].

1 Q0-Dreieck

Seien j, n, m natürliche Zahlen, k eine ganze Zahl mit Betrag kleinergleich n und p im Intervall [0,1] enthalten. Wir setzen

$$Q0P(n,k,p) := \frac{p^{(n+k)/2}\,(1-p)^{(n-k)/2}\; n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}$$

Die Funktion Q0P(n,k,p) gibt die Wahrscheinlichkeit des Erreichens von Koordinate k nach n Schritten eines Bernoulli random walk wieder, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt in positive k-Richtung (z.B. nach rechts) gleich p ist (und damit für einen Schritt in die entgegengesetzte Richtung gleich 1-p ist). Die Zahlen Q0(n,k) im Q0-Dreieck ergeben sich als Sonderfall gleicher Wahrscheinlichkeiten für Schritte nach rechts und links, d.h. für p=(1-p)=0.5:

$$Q0(n,k) = Q0P(n,k,0.5)$$

Die Rückkehrwahrscheinlichkeiten Q0Z(n) ("zentralen Trefferwahrscheinlichkeiten") entsprechen dem Sonderfall k=0:

$$Q0Z(n) = Q0P(n,0,0.5) = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

2 Q1-Dreieck

Das Q1-Dreieck ergibt sich aus einer Überlagerung zweier Q0-Dreiecke (entgegengesetzten Vorzeichens) startend in Zeile n=1 bei k=±1, jeweils gewichtet mit ±1/2. Addition der beiden läuft auf eine "diskrete Differenzierung" nach k hinaus.

$$Q1(n,k) = -\frac{k}{n}\,Q0(n,k)$$

Die Zahlen Q1(n,k) des Q1-Dreiecks ergeben sich betragsmäßig auch, wenn man beginnend ab Zeile n=1 die weiteren Zeilen in üblicher Weise konstruiert, wobei man aber in jeder Zeile mit gerader Zeilennummer n jeweils die Zahlen in Zeilenmitte k=0 auf 0 setzt, sozusagen "rausfließen" lässt, so dass sie im Weiteren keine Quellen mehr sein können. Sei für jede geradzahlige Zeilenummer n>0 die Zahl -Q2Z(n) die dortige "Rausflusswahrscheinlichkeit", d.h. die Wahrscheinlichkeit, zentral "rauszufließen". Q2Z(n) entspricht der ersten (diskreten) Ableitung von Q1(n,k) in k=0 nach k, d.h. Q2Z(n) = (Q1(n-1,1)-Q1(n-1,-1))/2; Damit ist in k=0 Q2Z(n) die 2. Ableitung von Q0(n,k) nach k. Es gilt

[1] In wqm (enthalten im Download der älteren Texte) befindet sich eine ausführlichere Formelsammlung.

$$Q2Z(n)=\frac{Q1(n-1,1)-Q1(n-1,-1)}{2}=-\frac{n!}{2^n(n-1)\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}=-\frac{Q0Z(n)}{n-1}$$

3 Q0M-Dreieck

$$Q0M(n,k):=\frac{(-0.5)^{(n+k)/2}\ 0.5^{(n-k)/2}\ n!}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}=(-1)^{(n+k)/2}\ Q0(n,k)$$

```
Q0M(n,k) ist bez. k=0 antisymmetrisch für n ungerade und
            bez. k=0     symmetrisch für n   gerade.
Additionsverhalten rechter und linker Seite ähnelt damit demjenigen von Fermionenamplituden bzw.
Bosonenamplituden.
```

4 Taylorentwicklungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Q0P\left(2n,0,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}Q0Z(2n)x^{2n}$$

$$\sqrt{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}Q2Z(2n)\,x^{2n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Q0M(2n,0)\,x^{2n}$$

5 Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{l/2}Q0Z(2m)}{\sqrt{\frac{8n^3}{9\pi}}},\ \frac{\sum_{m=0}^{n/2}Q0Z(2m)}{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}},\ \frac{Q0Z(n)}{\sqrt{\frac{2}{\pi\,n}}},\ \frac{-Q2Z(n)}{\sqrt{\frac{2}{\pi\,n^3}}}\right]=[1,1,1,1]$$

6 Mehrfache diskrete Differenzierung (Bildung finiter Differenzen höherer Ordnung)

Ähnlich wie im analytischen Fall lässt sich mehrfache diskrete Differenzierung rekursiv definieren (durch Bildung finiter Differenzen höherer Ordnung): Sei QDP(d,n,k,p) die d fach entlang k differenzierte Funktion Q0P(n,k,p), dann gilt

$$QDP(0,n,k,p)=Q0P(n,k,p)$$

und für n ≥ d ≥ 1

$$QDP(d,n,k,p)=\frac{QDP(d-1,n-1,k+1,p)-QDP(d-1,n-1,k-1,p)}{2}.$$

Es ist n ≥ d notwendig, damit genügend Werte verfügbar sind, um eine (finite) Differenz d ter Ordnung bilden zu können.

6.1 Binomialkoeffizienten und mehrfache Differenzierung (Beispielmatrix)

{BinCoeffDiffMatrix} In diskreten Betrachtungen ist die Darstellung von Operatoren als Matrizen oft zweckmäßig. Hier eine Matrixdarstellung des Operators für diskrete Differenzierung in Form eine Beispielmatrix mit hoher Anzahl von Dimensionen zur Verdeutlichung der Entwicklung: Multiplikation eines 15-komponentigen Vektors mit folgender Matrix

$$\Delta := \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{vmatrix} * 1/2$$

bedeutet einfache diskrete Differenzierung "entlang" dem Index k der Vektorkomponenten (bzw. Bildung der finiten Differenz erster Ordnung - der Versatz dk des Index k beträgt 2, daher Teilung durch 2). Multiplikation mit der n-ten Potenz Δ^n dieser Matrix ergibt n-fache diskrete Differenzierung (bzw. Bildung der finiten Differenz n-ter Ordnung). Beispielsweise bedeutet Multiplikation mit

$$\Delta^{6} = \begin{vmatrix}
-20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 \\
0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 \\
15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\
0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\
-6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 & -6 \\
-6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 & 0 \\
0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 & 15 \\
15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20 & 0 \\
0 & 15 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 15 & 0 & -20
\end{vmatrix} * 1/64$$

6-fache diskrete Differenzierung bzw. die Bildung der finiten Differenz 6-ter Ordnung. Die Zeilen bzw. Spalten der Matrix Δ^n enthalten mit abwechselndem Vorzeichen die Binomialkoeffizienten, geteilt durch 2^n, in diesem Beispiel die Zahlen 6!/(k!·(6 - k)!·2^6) = Q0(6, 2k-6).

7 Spezielle Differenzen

horizontal (örtlich):

$$Q0(n,k+2) - Q0(n,k) = 2\,QDP(1,n+1,k+1,\frac{1}{2}) = 2\,Q1(n+1,k+1) = \frac{-2(k+1)}{n+1} Q0(n+1,k+1)$$

vertikal (zeitlich):

$$Q0(n+2,k) - Q0(n,k) = \frac{k^2 - n - 2}{(n+2)(n+1)} Q0(n+2,k)$$

Korrespondenz in der Mitte:

$$Q1(n+1,1) = Q0(n+2,0) - Q0(n,0) = \frac{1}{2}(Q0(n,2) - Q0(n,0))$$

7.1 Schrödinger diskret

$$Q0(n,k-2)-2Q0(n,k)+Q0(n,k+2)=4QDP(2,n+2,k,\frac{1}{2})=4(Q0(n+2,k)-Q0(n,k))$$

$$Q1(n,k-2)-2Q1(n,k)+Q1(n,k+2)=4QDP(3,n+2,k,\frac{1}{2})=4(Q1(n+2,k)-Q1(n,k))$$

Bemerkung: Relation der 2. diskreten Ableitung von Q0(n-2,k) zu Q0(n,k):

$$Q0(n-2,k-2)-2Q0(n-2,k)+Q0(n-2,k+2)=Q0(n,k)\frac{4(k^2-n)}{n(n-1)}$$

8 Skalarprodukte

8.1 horizontal

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} Q0(m,2k)\,Q0(n,2k+j)=Q0(m+n,j)$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q0(n,2k)^2=Q0(2n,0)$$

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} Q1(m,2k)\,Q1(n,2k)=Q1(m+n-1,-1)=-Q2Z(m+n)$$

$$2\sum_{k=-n/2}^{n/2}(2k)^2\,Q0(n,2k)^2-0.5\sum_{k=-(n+1)/2}^{(n-1)/2}Q0(n-1,2k)^2=n\;Q0(2n-2,0)$$

8.2 vertikal

$$\sum_{n=1}^{2j-1}\sum_{k=-n/2}^{n/2}Q1(n,2k)\,Q1(2j-n,2k)=-(2j-1)\,Q2Z(2j)=Q0Z(2j)$$ {skahove}

$$\sum_{k=0}^{n}Q2Z(2k)\,Q2Z(2n-2k)=\left(\sum_{k=1}^{n}Q2Z(2k)\,Q2Z(2n-2k)\right)+Q2Z(2n)=0\ .$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}Q2Z(2j)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-k}Q2Z(2j)\right)=\sum_{k=0}^{n}Q0Z(2k)\,Q0Z(2n-2k)=1\ .$$

8.3 Orthogonalität nach mehrfacher diskreter Differenzierung (analog Hermite Polynome)

{HermPolDiscrete}
Seien d und l jeweils größergleich n.
Wir definieren das gewichtete Skalarprodukt QSP mit

$$QSP(d,l,n,p):=\sum_{k=-n/2}^{n/2}\frac{1}{Q0P(n,2k,p)}QDP(d,n,2k,p)\,QDP(l,n,2k,p)\,.$$

Dann gilt für d≠l

$$QSP(d,l,n,p):=0$$

(d.h. Orthogonalität) und ansonsten

$$QSP(d,d,n,p) := \frac{1}{2^n\,(4p(1-p)\;Q0(n,n-2d)} = \frac{1}{p^{2d-n}\;4^d\;Q0P(n,n-2d,p)}\;,$$

insbesondere

$$QSP(d,d,n,\frac{1}{2}) := \frac{1}{2^n\;Q0(n,n-2d)}\;.$$

Der Nenner im letzten Ausdruck entspricht der Anzahl der Wegmöglichkeiten vom Punkt (0,0) zum Punkt (n,n-2d) im Q0-Dreieck.

9 Summen

$$Q0Z(2n) = \sum_{m=0}^{n} Q2Z(2m) = 1 + \sum_{m=1}^{n} Q2Z(2m)$$

10 Momente

10.1 vertikal

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} Q0Z(2m)}{(2n+1)Q0Z(2n)} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} Q0Z(2m)}{2n\,Q0Z(2n)} = \frac{-Q0Z(2n)}{(2n-1)Q2Z(2n)} = \frac{3\sum_{m=0}^{n} 2m\;Q0Z(2m)}{2n(2n+1)Q0Z(2n)} = 1$$

10.2 horizontal

$$-\sum_{k=-n}^{n} Q1(2n,2k)\;2k \;=\; -\sum_{k=-n}^{n+1} Q1(2n+1,\;2k-1)\;\;(2k-1) \;=\; 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2k\,Q0(2n,2k) = n\;Q0Z(2n)$$

$$2\sum_{k=0}^{n/2} (2k)^2\;Q0(n,2k) = 4\sum_{k=0}^{n/4} (4k)^2\;Q0(n,4k) = n$$

$$\sum_{k=-n}^{0} (2k)^2\;Q1(2n,2k) = 2n\,Q0Z(n)$$

$$\sum_{k=-n}^{0} (2k)^3\,Q1(2n,2k) = 1-3n$$

10.2.1 relativ zum Rand

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2k+n)^2\;Q0(n,2k) = n(n+1)$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2k-n)^2\;Q1(n,2k) = 2n$$

11 Summen und Momente für variable p

Dieses Kapitel enthält einige elementare Formeln für variable p (und n>0).

Die erste finite Differenz (diskrete Ableitung) von Q0P ist

$$Q1P(n,k,p) := \frac{Q0P(n-1,k+1,p) - Q0P(n-1,k-1,p)}{2}$$

11.1 Summen

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q0P(n,2k,p) = 1$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} Q1P(n,2k,p) = 0$$

11.2 Abweichung relativ zum Rand

Im Rand sind die Wahrscheinlichkeiten p und 1-p sehr verschieden. Mit p->0 gilt auch v->0 (tiefe Temperaturen).

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (n+2k)\,Q0P(n,2k,p) = 2np$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (-n-2k)\,Q1P(n,2k,p) = 1$$

11.3 Abweichung relativ zum Ursprung

In der Mitte sind die Wahrscheinlichkeiten p und 1-p nahezu gleich, also p->1/2 und damit v->C (der Grenzfall p=1/2 bzw. v=C (Photonen) wird durch Q0 und Q1 repräsentiert).

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (2k)\,Q0P(n,2k,p) = 2np - n = n(2p-1)$$

$$\sum_{k=-n/2}^{n/2} (-2k)\,Q1P(n,2k,p) = 1$$

12 Analytische Darstellungen

Sei

$$Q0E(n,k) := \sqrt{\frac{2}{\pi\, n}}\, e^{-k^2/(2n)}$$

$$Q1E(n,k) := -\frac{k}{n} Q0E(n,k)$$

also

$$Q1E(n,k) = \frac{\partial}{\partial k}\, Q0E(n,k)$$

dann gilt für jede Folge (k_n) mit (k_n)^3/n^2→0 für n→∞ (S. 80 [likr])

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{Q0E(n,k_n)}{Q0(n,k_n)}, \frac{Q1E(n,k_n)}{Q1(n,k_n)}\right] = [1,1]$$

Nochmals getestete Approximation: Für |k/n| << 1 (z.B. bis n=100 für |k/n| < 0.2) ist Q0(n,k)=Q0P(n,k,0.5) in Beziehung zur Normalverteilung:

$$Q0(n,k)/Q0E(n,k) = Q0(n,k) \Big/ \left(\left(\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\right) e^{\left(-\frac{k^2}{2n}\right)}\right) \to 1$$

für größere |k/n| fällt dieser Quotient erst und wird dann ungültig.

12.1 Schrödinger analytisch

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} Q0E(n,k) = 2\frac{\partial}{\partial n} Q0E(n,k) = \frac{k^2-n}{n^2} Q0E(n,k)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} Q1E(n,k) = 2\frac{\partial}{\partial n} Q1E(n,k) = \frac{k^2-3n}{n^2} Q1E(n,k)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial k}\right]^{2j} Q0E(n,k) = 2^j \left[\frac{\partial}{\partial n}\right]^{j} Q0E(n,k)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial k}\right]^{2j} Q1E(n,k) = 2^j \left[\frac{\partial}{\partial n}\right]^{j} Q1E(n,k)$$

12.2 Verhalten für n->inf; Diracsche Deltafunktion

{DiracDeltaFu} Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q0E(n,k)}{2}\, dk = 1$$

Das Verhalten für n→∞ lässt sich durch eine n-proportionale Maßstabsanpassung veranschaulichen, d.h. durch eine horizontale Stauchung und dafür vertikale Streckung um jeweils den Faktor n. Der Wert des Integrals bleibt davon unberührt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\; Q0E(n,nk)}{2}\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\; e^{-k^2 n/2}\, dk = 1$$

Die Funktion f(x) = n Q0E(n, nx) / 2 geht für n→∞ also gegen die Diracsche Deltafunktion.

12.3 Mehrfache Differenzierung und Hermite-Polynome

{HermPol} Die Hermite-Polynome $H_n(x)$ sind (bis auf das Vorzeichen) Sonderfälle der aus mehrfacher Differenzierung resultierenden Vorfaktoren:

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]^n Q0E(\tfrac{1}{2},x)}{Q0E(\tfrac{1}{2},x)}$$